ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ГОРОДА МОСКВЫ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ
«МОСКОВСКИЙ ГОРОДСКОЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Садовников Евгений Юрьевич

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К РЕФОРМИРОВАНИЮ СОДЕРЖАНИЯ ОБЩЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ПЕДАГОГИКЕ 1960–1980-х гг.

Научная специальность 5.8.1 – Общая педагогика, история педагогики и образования
(педагогические науки)

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата педагогических наук

Научный руководитель:
доктор педагогических наук,
профессор,
член-корреспондент РАО
М.В. Богуславский

Москва – 2024

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ………………………………………………………….. 4-29

ГЛАВА 1. ПРЕДПОСЫЛКИ И ГЕНЕЗИС ПРОЦЕССА РЕФОРМИРОВАНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ОБЩЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ПЕДАГОГИКЕ 1960–1980-х ГОДОВ………………………………….. 30-125

1.1 Социальные предпосылки реформирования содержания отечественного общего математического образования………………… 30-38

1.1.1 Социально-политические и социально-экономические предпосылки развития системы общего математического образования 30-32

1.1.2 Реформирование системы общего образования в соответствии с законом «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР» (1959)…………… 33-38

1.2 Формирование теоретической основы реформирования содержания основного математического образования…………………. 38-63

1.2.1 Международное влияние на реформирование основного математического образования………………………………………. 38-48

1.2.2 Тенденции повышения научности математического образования в СССР в 1930-е – первой половине 1960-х годов……………………… 48-63

1.3 Реформа школьного математического образования 1965–1978-х годов: содержание, итоги, последствия………………………………… 64-96

1.3.1 Реставрация структуры общего образования…………………… 64-66

1.3.2 Начало осуществления реформы школьного математического образования………………………………………………………………... 66-71

1.3.3 Цели и задачи реформы содержания общего математического образования………………………………………………………………... 71-74

1.3.4 Периодизация реформирования содержания школьного математического образования………………………………………… 74-96

1.4 Воздействие реформы содержания общего математического образования на динамику качества преподавания математики в образовательных учреждениях………………………………………...... 96-119

1.4.1 Влияние реформы содержания общего математического образования 1970-х годов на уровень математического образования школьников………………………………………………………………... 97-103

1.4.2 Влияние реформы содержания общего математического образования 1970-х годов на результаты вступительных экзаменов в педагогических вузах…………………………………………………... 104-110

1.4.3 Влияние реформы содержания общего математического образования 1970-х годов на результаты вступительных экзаменов в технических вузах…………………………………………………………	111-115
1.4.4 Различия в сложности экзаменационного материала в педагогических институтах по сравнению с техническими вузами........	115-117
1.4.5 Результаты вступительных экзаменов по математике в техникумы после восьмого класса……………………………………....	117-119
ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ……………………………………….	120-125
ГЛАВА 2. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОЦЕССОВ РЕФОРМИРОВАНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ОБЩЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В 1960–1980-е ГОДЫ…	126-259
2.1 Сравнительно-сопоставительный анализ учебных планов и программ общего математического образования в 1960-е годы………	126-154
2.1.1 Сравнительно-сопоставительный анализ учебных планов 1960 и 1968 годов……………………………………………………………….	126-136
2.1.2 Сравнительно-сопоставительный анализ учебных программ 1960 и 1968 годов……………………………………………………………..	136-154
2.2 Сравнительно-сопоставительный анализ программ общего математического образования в 1970-е – 1980-е годы………………….	154-194
2.2.1 Программа общего математического образования 1970–1971 годов………………………………………………………………………..	152-184
2.2.2 Программа по математике 1979 года………………………………	184-189
2.2.3 Программа по математике для школ 1982 года……………………	189-194
2.3 Тенденции создания учебных пособий для общего математического образования в 1960-е – 1970-е годы………………….	195-225
2.4 Сравнительный анализ методических пособий по общему математическому образованию………………………………………..	225-255
2.4.1 Инновационные подходы в методике обучения математике……..	225-232
2.4.2 Сравнение методических особенностей преподавания математики………………………………………………………………	233-255
ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ……………………………………….	256-259
ЗАКЛЮЧЕНИЕ………………………………………………………..	260-263
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ………………………………………………	264-285

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования обоснована тем, что математическая подготовка составляет основу, определяющую уровень политического и экономического прогресса страны. В государстве и обществе в настоящее время сложился серьезный запрос на кардинальное улучшение математического образования, которое играет ключевую роль в системе общего образования.

Достижение высокого уровня математического образования является необходимым условием для выполнения задач по формированию суверенной экономики, а также для реализации стратегических целей и задач социально-экономического развития Российской Федерации в долгосрочной перспективе.

На современном этапе, когда экономика страны сталкивается с различными вызовами, создание прочной математической базы становится особенно важным. Без должного уровня математической грамотности невозможно успешно справляться с актуальными задачами социально-экономического развития, что подчеркивает необходимость модернизации в данной предметной области.

Повышение качества преподавания математики обосновано достижением цели технологического лидерства в наукоемких направлениях. Так, указом Президента Российской Федерации от 21 июля 2020 года № 474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года» было установлено, что Российская Федерация должна входить в число десяти ведущих стран по объему научных исследований и разработок [197]. Для достижения поставленной цели, очевидно, необходимы изменения не только в высшем образовании, но и в общем.

Значимо, что 13 июня 2024 года на заседании Совета по науке и образованию в Дубне президентом РФ было обозначено приоритетной задачей развитие и достижение высокого уровня подготовки учеников по математике и другим естественнонаучным дисциплинам. На том же заседании директор президентского физико-математического лицея М.Я. Пратусевич отметил, что на сегодняшний день наблюдается негативная тенденция в результатах сдачи профильного ЕГЭ по математике, что касается выпускников, имеющих потенциальную возможность выбрать инженерные направления.

С 2019 года, когда число прошедших экзамен составило 420 тысяч, количество таких учащихся сократилось до 350 тысяч в 2023-м. Более того, по данным на 2024 год произошло снижение еще на 20 тысяч учащихся, что составило около 330 тысяч человек, прошедших ЕГЭ по математике.

В соответствии с перечнем поручений по итогам заседания Совета по науке и образованию и встречи с получателями мегагрантов и ведущими учеными (утв. Президентом РФ 30.07.2024 № Пр-1435, п. 1 б) в национальный проект «Молодежь и дети» включены мероприятия, направленные на значительное повышение качества преподавания математики в школах [163].

Улучшение качества математического образования в научно-педагогическом сообществе всегда считалось важным направлением в развитии отечественного образования. Математическое образование, представляющее собой совокупность учебных и дидактических знаний, а также навыков и умений, полученных в процессе учебно-воспитательной деятельности, традиционно занимает важное место в структуре общего образования.

24 ноября 2023 года на IV Всероссийском съезде учителей и преподавателей математики выступил ректор МГУ В.А. Садовничий с предложением о необходимости «модернизации» концепции математического образования [158]. Стоит отметить, что по данной концепции, принятой в 2013 году, главной целью являлось достижение лидирующей позиции РФ в мире по развитию математического образования [108]. Для достижения поставленной цели планировалась «модернизация» содержания учебных программ математического образования на всех его уровнях. Также стоит отметить, что в данной концепции акцентировалось внимание на том, что Россия имеет значительный опыт в области математического образования и науки, который накапливался с 50-х до 80-х годов XX века. Система математического образования, существующая в стране, продолжает традиции советской модели.

В.А. Садовничий указал на то, что в течение последнего десятилетия произошло множество важных изменений в школьной математике. Появились новые темы, такие как теория вероятностей, статистика и анализ данных. Пандемия способствовала активному внедрению технологий в образовательный процесс, а цифровизация и искусственный интеллект становятся все более заметными в нашей жизни, что создает новые вызовы для математического образования. Данные аспекты создают необходимость в модернизации действующей концепции математического образования, а впоследствии и модернизации школьной учебной программы по математике.

Стоит учесть, что с появлением в 2022 году обновленного ФГОС СОО изменяются цели учебных дисциплин, в том числе и математики. С изменением целей обучения математике изменяется и содержание образования по учебному предмету.

Все рассмотренные факторы создают острую необходимость в модернизации школьного математического образования. Новые требования, предъявляемые социумом, а также последние тенденции в развитии информационных технологий формируют спрос на высококвалифицированных специалистов.

Аналогичная ситуация сложилась в 1960–1980-е годы СССР. История развития математического образования в отечественной педагогике указывает на цикличность активизирующих процессов реформирования образования. Данный аспект подчеркивает важность анализа потенциала процессов и результатов реформирования содержания школьного математического образования в СССР, особенно в свете принципиальных качественных изменений в методологии и структуре математического обучения, которые имели место в 60–80-х годах XX века.

Основные дефиниции исследования

Под понятием **«содержание общего математического образования»** понимается реализуемая в общеобразовательных организациях совокупность знаний, состоящая из дисциплин: математика, геометрия, алгебра и арифметика.

Под **«научно-методическими подходами»** понимается комплекс научно и педагогически обоснованных направлений, отражающих определенное целеценностное содержание процесса совершенствования общего математического образования.

Хронологические рамки исследования

Нижней хронологической границей выступает середина 1960-х годов – данный период характеризуется началом реформирования математического образования. В 1965 году академик АПН РСФСР А.И. Маркушевич возглавил Центральную Комиссию АН и АПН СССР по определению содержания образования в средней школе. Подкомиссию по определению содержания математического образования возглавил академик АН СССР А.Н. Колмогоров. Это обусловило возможности для начала процесса подготовки реформирования общего математического образования.

Верхняя хронологическая граница – середина 1980-х годов – определяется завершением процесса реформирования содержания общего математического образования на определенной концептуальной основе. В 1984 году началась новая реформа школьного образования, которая ставила иные стратегические цели и задачи, и вся проблематика предшествующего периода утратила свою актуальность.

Таким образом, двадцатилетний период 1964–1984 годов можно рассматривать как единый процесс реформирования содержания общего математического образования в развитии российской школы с его взаимосвязанными и взаимообусловленными внутренними этапами. Именно рассмотрение выделенного хронологического интервала как единого целого позволяет выявить тенденции и закономерности исследуемого процесса, определить его потенциал, установить системные недостатки в его осуществлении, их последующее неоднократное повторение, являвшееся результатом недостаточного учета исторического опыта реформирования и модернизации российского образования. Возможность такого анализа значительно снижается, когда изучаются только отдельные этапы реформирования содержания общего математического образования, а не весь период в целом. Все эти реминисценции и определили указанные хронологические рамки.

Состояние изученности

Историографический анализ состояния изученности процесса реформирования общего математического образования в отечественной педагогике 1960–1980-х годов позволяет сделать заключение, что исследуемая проблема вызывала к себе устойчивый и нарастающий интерес у исследователей, начиная с конца XX века и по настоящее время.

Специально процесс развития общего математического образования во второй половины XX века плодотворно исследовали А.М. Абрамов, С.Н. Дворяткина, Т.В. Добудько, Ю.П. Золотухин, Ю.М. Колягин, И.П. Костенко, Р.А. Мельников, Т.С. Полякова, А.А. Попов, В.М. Резников, К.А. Рыбников, К.К. Рыбников, О.А. Саввина, Н.А. Терновая, В.М. Тихомиров, В.В. Фирсов. В своих трудах ученые провели глубокие исследования процессов реформирования общего математического образования в период 1960–1980-х годов; охарактеризовали их последствия для дальнейшего развития школьного математического образования. Исследователи выполнили ряд научных изысканий, связанных с различными этапами рассматриваемого процесса, разработали продуктивные подходы к проблеме периодизации процессов реформирования общего математического образования в период1960–1980-х годов.

Среди наиболее значимых публикаций выделим следующие: А.М. Абрамов - Великий отечественный мир, или Колмогоровский проект XXI века: книга Александра Абрамова и воспоминания о нем (2016) [1]; История математического образования в СССР / под ред. И.З. Штокало (1975) [73]; Ю.М. Колягин - Русская школа и математическое образование. Наша гордость и наша боль (2001) [93]; Ю.М. Колягин, О.А. Саввина - Бунт российского министерства и отделения математики АН СССР (2012) [95]; И.П. Костенко - Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы (2013) [105];

Острова утопии: Педагогическое и социальное проектирование послевоенной школы (1940–1980-е) (2015) [159]; Т.С. Полякова - История математического образования в России (2002) [167]; К.А. Рыбников, К.К. Рыбников - Войны за просвещение. Математическое образование в СССР и России и Болонский процесс (2012) [186]; В.В. Фирсов - Учим математикой (2012) [199]; Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове / под ред. В.М. Тихомирова (1999) [210].

Данные труды характеризуются многообразием подходов к изучению процесса реформирования содержания общего математического образования и практики его реализации, существенным различием в оценках и выводах.

Подчеркнем, что основной корпус исторических исследований и публикаций по изучению процесса реформирования содержания общего математического образования в 1960–1980-х годах был выполнен в конце XX – начале XXI века, через период в четверть века после окончания рассматриваемых в них событий. Поскольку это не очень отдаленный по времени хронологический интервал, то авторами наиболее значимых публикаций, разноплановых по тематике, целевой направленности, концептуальности содержания, зачастую являлись современники и непосредственные участники рассматриваемых событий, поэтому в их исследованиях нередко превалируют субъективные научно-личностные воззрения, что оказывает существенное влияние на объективность трактовки исторических явлений. Это определило их безусловно субъективный взгляд на характеризуемый процесс, его предпосылки, генезис и последствия. Особенно это проявляется в оценке результатов последствий реформирования содержания общего математического образования в 1960–1980-х годах.

В научной литературе по исследуемой проблеме выделена только одна диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук: исследование Л.Г. Низамовой «Тенденции развития математического образования в общеобразовательных учебных заведениях во второй половины XX века» (2009), но в работе в основном использовался региональный материал Республики Татарстан.

Вопросы реформирования содержания общего математического образования как неотъемлемой составной части истории отечественного образования и педагогики представляли значительный интерес и *для зарубежных исследователей.*

Среди публикаций зарубежных авторов выделим следующие: Parsons C. The Madison Project and new math – what happened? (1981) [228]; Fecteau A. N. What is modern about “modern” mathematics in the intermediate grades? (1968) [214]; Feynman, R. P. New Textbooks for the “New” Mathematics (1965) [215]; Gosztonyi K. The “New Math” reform and pedagogical flows in Hungarian and French mathematics education (2015) [217]; Graumann G. Backgrounds and Goals of ‘Innovations’: The Examples of New Math in the 1960s and the Change from Input to Output 1995 (2019) [218]; Hoffman J., Johnson C., Logg A. Dreams of Calculus: Perspectives on Mathematics Education (2001) [219]; Katz V.J. Using History to Teach Mathematics: An International Perspective (2000) [220]; Marmier A. M. On the idea of “democratisation”, “modern mathematics” and mathematics teaching in France (2014) [224]; Mashaal M. Bourbaki Une Société Secrète De Mathématiciens (2002) [225]; Miller J. W. Whatever Happened to New Math? (1990) [226].

Однако зарубежные историки на протяжении 1960–1980-х годов были по сути дела лишены возможности для глубоких и объективных исследований, поскольку советские архивы для них были труднодоступны.

В результате они строили свою научную деятельность в основном на изучении опубликованных источников, которые, как правило, демонстрировали официальную государственную политику в решении вопросов образования. Это было обусловлено тем, что направленность школьных реформ, в конечном счете, определялась потребностями общественного развития, а содержание и методы реформирования содержания общего математического образования являлись отражением социально-политических процессов, реализуемых путем решения образовательных проблем. Это явилось одним из факторов, во многом определивших характер данных исследований, направленность содержавшихся в них выводов.

Существенно, что в представленных зарубежных работах синхронно рассматривался процесс реформирования содержания общего математического образования в США, Франции, Венгрии, Германии и других странах. Исследователи характеризовали опыт внедрения «новой математики» в школы своих стран, а также отношение учеников, учителей и родителей к данным нововведениям. Рассматривались также новые учебные планы математического образования, учебники и методики преподавания математики.

В сравнительно-сопоставительном плане зарубежные авторы анализировали общие причины неудачи модернизации математического образования, а также сопоставляли различия в аспектах реформирования системы образования своих стран с СССР.

Таким образом, исследования зарубежных авторов помогают выявить причины активизации «волны модернизации» математического образования в период 1950–1970-х годов, определить и сформулировать предпосылки стремления усилить научность школьного курса математики, а также оценить степень влияния «новой математики» на уровень и качество математической подготовки выпускников. Компаративистский анализ последствий «волны модернизации» математического образования за рубежом в 1960–1980-х годах в сравнении с модернизацией математического образования в СССР в рассматриваемый период позволяет обобщить тенденции развития школьной математики в мире.

В целом историографический анализ дает основания констатировать, что проявилось сущностное противоречие между сложившимися различными ретроспективными трактовками научно-методических подходов к реформированию содержания общего математического образования в период 1960–1980-х годов. Подчеркнем острый дискуссионный характер трактовки вопроса об успешности реформирования общего математического образования в рассматриваемый период и последствий его воздействия на последующее преподавание в образовательных учреждениях, а также неоднозначную трактовку личности и деятельности А.Н. Колмогорова.

Также отметим, что в научной литературе отсутствует специальное исследование научно-методических подходов к процессу реформирования содержания общего математического образования в период 1960–1980-х годов, что затрудняет целостную и объективную его трактовку. Выполненные исследования охватывают, как правило, лишь отдельные исторические периоды реформы и определенные вопросы истории реформирования общего математического образования в рассматриваемый период.

Публикаций же, ставивших целью определение общей концепции процесса реформирования, выявление действовавших тенденций и закономерностей, в историографии не выявлено. Также подчеркнем, что отдельные аспекты процесса реформирования общего математического образования в рассматриваемый период, поднятые российскими и зарубежными авторами, не исчерпывают всего многообразия проблемного поля исследуемой темы.

Ведущая идея исследования заключается в том, что комплексное обобщение, включающее теоретическое осмысление и аналитическое представление существенного объема источниковой базы по проблемам реформирования общего математического образования в рассматриваемый период, научно-методических обоснований процесса реформирования содержания общего математического образования в период 1960–1980-х годов, позволит создать научную основу для продуктивного обновления, совершенствования и обогащения содержания отечественного общего математического образования в современных условиях.

Таким образом, актуальность и значимость исследования научно-методических подходов реформирования содержания общего математического образования в период 1960–1980-х годов обусловлена рефлексией необходимости разрешения **противоречий** между:

– фрагментарным состоянием изученности процесса реформирования содержания общего математического образования СССР в период 1960–1980-х годов и объективной потребностью историко-педагогического знания в системнообобщающем исследовании процесса реформирования содержания общего математического образования в рассматриваемый период;

– объективной необходимостью выявления ведущих тенденций развития процесса реформирования содержания общего математического образования и недостаточной разработанностью методологии его трактовки в сущностном, системном и концептуальном аспектах;

– сформировавшимися научно-методическими представлениями о процессе реформирования содержания математического образования в сообществе ученых-математиков и педагогическом сообществе учителей математики в период 1960-х – первой половины 1980-х годов и современными достаточно диаметральными характеристиками и оценками, сложившимися по отношению к данному историко-педагогическому явлению;

– сложившимися историографическими стереотипами в научно–педагогическом сообществе: доминированием персональной ответственности за успешность и недостатки реформирования содержания общего математического образования в период 1960–1980-х годов, приписываемой исключительно А.Н. Колмогорову, и недооценкой роли других научно-педагогических деятелей в сфере реформирования.

Рефлексия необходимости разрешения и эффективного преодоления указанных выше теоретико-методологических, социально-исторических и прикладных противоречий, имеющих большой эвристический смысл и требующих научной разработки, явилась основанием для формулирования **проблемы исследования** – существовали ли научно-методические подходы к реформированию содержания общего математического образования в отечественной педагогике 1960–1980-х годов в качестве отдельных парадигмальных направлений?

Разрешение данной проблемы заключается:

– *в теоретическом плане* – в обосновании, основанном на массиве источников, подвергаемых анализу с использованием комплекса методов историко-педагогического исследования процесса эволюции представлений о целях, содержании и формах реформирования общего математического образования в отечественной педагогике 1960–1980-х годов как научной революции и смены парадигм;

– *в практическом плане* – в выявлении и характеристике основных форм и способов концептуализации процесса реформирования содержания общего математического образования в отечественной педагогике 1960–1980-х годов, в осмыслении перспектив использования накопленного потенциала в современном отечественном общем математическом образовании.

Таким образом, рефлексия актуальности рассматриваемой проблемы, ее недостаточной научной разработанности и вместе с тем значимости для современного отечественного математического образования обусловила выбор темы диссертационного исследования: **«Научно-методические подходы к реформированию содержания общего математического образования в отечественной педагогике 1960–1980-х годов».**

Объект исследования – содержание отечественного общего математического образования в период 1960–1980-х годов.

Предмет исследования – научно-методические подходы в отечественной педагогике к сопровождению процесса реформирования содержания общего математического образования в 1960–1980-е годы.

Цель исследования – осуществить ретроспективную реконструкцию научно-методических подходов в отечественной педагогике по сопровождению процесса реформирования содержания общего математического образования 1960–1980-х годов.

В соответствии с целью исследования были сформулированы следующие **задачи:**

1 .Определить характер воздействия социально-политических, социально-экономических и научно-педагогических предпосылок на процесс реформирования

содержания отечественного общего математического образования в 1960–1980-е годы.

2. Выявить в отечественной педагогике исследуемого периода движущие силы осуществления значимых периодов генезиса процесса реформирования содержания общего математического образования и установить его периодизацию.

3. Представить сравнительную характеристику различных научно-методических подходов и продуцировавших их лидеров к процессу реформирования содержания отечественного общего математического образования в 1960–1980-х годах.

4. Охарактеризовать потенциал научно-методического обеспечения (учебные планы, учебные программы, учебники, методические пособия) процессов реформирования содержания общего математического образования в 1960–1980-е годы.

5. Обосновать основные результаты воздействия процесса реализации реформы содержания общего математического образования на динамику качества преподавания математики в образовательных учреждениях в рассматриваемый период.

6. Обобщить с современных позиций ведущие тенденции и стратегические последствия процесса реформирования содержания отечественного общего математического образования в 1960–1980-е годы как потенциала для концептуального, содержательного и методического развития современного методико-математического знания.

Методологическую основу исследования составил комплекс взаимосвязанных методологических подходов:

1. *Историко-методологический подход* (А.М. Абрамов, М.В. Богуславский, С.Н. Дворяткина, Ю.П. Золотухин, Ю.М. Колягин, И.П. Костенко, Р.А. Мельников, А.А. Попов, В.М. Резников, М.В. Рыжаков, О.А. Саввина, Н.А. Терновая) содействовал формированию структурной методологии конкретно-исторического

исследования в ракурсе исследования научно-педагогических концепций реформирования и модернизации общего образования.

2. *Историко-аналитический подход* (А.М. Абрамов, А.В. Овчинников, З.И. Равкин, И.П. Костенко) способствовал целостному осмыслению процессов реформирования содержания общего математического образования в отечественной педагогике 1960–1980-х годов.

3. *Историко-контекстный подход* (А.М. Молоков, А.Н. Поздняков, А.М. Ходырев, Р.Ф. Шакиров) позволил рассмотреть процессы реформирования содержания общего математического образования в социально-политическом и социально-экономическом контекстах в ракурсе научно-педагогических концепций реформирования и модернизации общего образования, установить влияние реформы общего математического образования 1960–1980-х годов на развитие отечественной системы образования в целом.

4. *Проблемно-хронологический подход* (А.М. Абрамов, В.И. Арнольд, В.С. Владимиров, А.Н. Колмогоров, Ю.М. Колягин, А.И. Маркушевич, Л.С. Понтрягин, А.Н. Тихонов, В.В. Фирсов) позволил осуществить сравнительно-сопоставительный и историко-персоналистский анализ различных подходов в отечественной педагогике к оценке процессов реформирования содержания отечественного общего математического образования в период 1960–1980-х годов.

5. *Парадигмальный подход* (М.В. Богуславский, К.А. Рыбников, Л.Г. Назимова) позволил сформулировать и определить процессы реформирования содержания отечественного общего математического образования в отечественной педагогике 1960–1980-х годов как смену научно-педагогических парадигм.

Сочетание данных методологических подходов позволило в диалоге ретроспективы и перспективы в целостном виде представить различные научно-методические подходы в отечественной педагогике к реформированию содержания отечественного общего математического образования периода 1960–1980-х годов; осуществить сравнительный анализ исследуемых подходов; представить с позиций современности оценку ведущих тенденций, достигнутых результатов и стратегических последствий реформирования содержания общего математического образования в период 1960–1980-х годов.

Для решения поставленных задач применены следующие общенаучные и историко-педагогические **методы исследования:**

На общенаучном уровне историко-педагогического исследования применен следующий комплекс методов: источниковедческий анализ нормативных актов, статистических материалов по рассматриваемой проблеме; контент-анализ документов в их историческом и социальном контексте; историко-системный синтез и интерпретация полученной информации.

На *предметно-научном уровне* использован комплекс методов исследования, направленных на сравнительно-исторический анализ предпосылок и научно-методических основ реформирования содержания общего математического образования в период 1960–1980-х годов:

– *историко-структурный метод*, предполагающий выделение основных научно-методических подходов к реформированию содержания общего математического образования;

– *конструктивно-генетический метод*, включающий принцип историзма как базовый постулат и использующий исторический и логический методы в их единстве, что создает предпосылки для анализа динамики изменения содержания математического образования в период 1960–1980-х годов;

– *историко-компаративистский метод*, основанный на сравнительно-сопоставительном изучении научно-методических подходов к процессу реформирования содержания общего математического образования в период 1960–1980-х годов, выделению ведущих тенденций, оценке достигнутых результатов и установлению стратегических последствий.

Источниковая база исследования:

1. Официальные документы, определявшие развитие системы советского образования (директивные документы партийно-государственных органов, партийно-правительственные постановления, принятый Верховным советом СССР

закон «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР» (1959).

2. Нормативные акты, рекомендации, письма Министерства просвещения СССР и Министерства просвещения РСФСР, изданные в период1960–1980-х годов и определяющие направленность математического образования в общеобразовательных учреждениях, изменение его структуры, целей и задач.

3. Опубликованные материалы педагогических съездов, конференций, совещаний, научно-практических семинаров, на которых обсуждались процессы реформирования содержания общего математического образования.

4. Официальная статистика, годовые отчеты, текущие документы высших учебных заведений и общеобразовательных школ, характеризующие результаты реформирования содержания общего математического образования в общеобразовательных учреждениях.

5. Программно-методические материалы (учебные планы и учебные программы), отражающие содержание общего математического образования в период 1960–1980-х годов.

6. Учебные и методические пособия по математике для средней школы выпущенные в период 1960–1980-х годов.

7. Научные труды, в которых раскрыты концептуальные основы процесса реформирования содержания общего математического образования, изданные в период 1960–1980-х годов.

8. Публикации в научных журналах и периодической печати за весь период исследования, отражающие практику осуществления процесса реформирования содержания математического образования, характеризующие его проблемы и результаты.

9. Мемуарные и биографические источники, отражающие субъективно-ценностный взгляд участников событий и современников на процессы, происходившие в реформировании общего математического образования в исследуемый период, которые предоставили возможность проникнуться «духом

эпохи», увидеть принципиальные личностные различия в подходах к процессу реформирования содержания математического образования, приблизиться к пониманию его миссии и последствий.

Научная новизна исследования:

1. Раскрыты социально-политические, социально-экономические и научно-педагогические предпосылки каждого этапа процесса реформирования содержания общего математического образования в период 1950–1980-х годов, показана их объективная обусловленность как конкретно-историческими условиями, так и общими закономерностями развития отечественного образования.

2. Представлена периодизация процесса реформирования содержания общего математического образования в отечественной педагогике в рассматриваемый исторический период, охарактеризованы наиболее важные этапы данного процесса, его тенденции и закономерности, определены и сопоставлены причины рассогласований между целями, планировавшимися в разные периоды реформирования, и его результатами.

3. Установлено, что начиная с 1930-х годов проблема повышения научности и современности школьной математики вызывала пристальный интерес ученых в СССР и зарубежных странах. Пик популярности этой проблематики приходился на период 1950–1970-х годов, когда в различных странах происходило реформирование школьного курса математики в направлении повышения его научности. Причем данный реформационный процесс происходил синхронно в СССР и в зарубежных странах, поскольку потребность в повышении качества преподавания математики в школах в 1970-х годах была вызвана не только внутренней эволюцией отечественной педагогики, но и влиянием актуальных тенденций в развитии математики как науки в мире.

4. Определены основные научно-методические подходы к реформированию общего математического образования в отечественной и зарубежной педагогике рассматриваемого периода, раскрыто влияние вариативных позиций их научных лидеров на формирование направленности реформирования содержания общего

математического образования, обоснованы факторы, обусловившие принятие или отторжение в процессе разработки и осуществления реформы тех или иных идей модернизации общего математического образования.

5. Обоснована в результате проведения сравнительно-сопоставительного и системно-структурного анализа историко-генетическая характеристика научно-методических подходов в отечественной педагогике к реформированию содержания общего математического образования, выявлена степень влияния субъективных факторов на оценку реформы и установления ее значения.

6. Выявлены, обобщены и теоретически обоснованы положительные результаты реформирования общего математического образования в период 1960–1980-х годов, установлены проблемы и негативные явления рассматриваемого процесса.

Теоретическая значимость:

1. Данные, полученные в исследовании, обобщенные и синтезированные в нем положения, тенденции изучаемого процесса, установленные на основе репрезентации педагогически значимых особенностей социально-исторических процессов, содержащийся документальный и фактографический материал представляют собой основу для подготовки новых монографических работ по истории общего математического образования рассматриваемого периода, эволюции развития системы педагогического образования учителей математики, что вносит вклад в обогащение *истории математического образования*.

2. Целостное исследование процесса реформирования отечественного школьного образования в период 1960–1980-х годов, обобщение и теоретическое осмысление принципиальных основ и особенностей, обусловивших его формирование и развитие на разных этапах, раскрывает основные подходы к реформированию общего математического образования, сложившиеся в отечественной педагогике в период 1960–1980-х годов, что способствует обогащению *теории математического образования*.

3. Анализ результатов осуществленной динамики трансформации и обогащения содержания общего математического образования в рассматриваемый период содействует модернизации теоретических подходов к определению *современного содержания общего математического образования.*

4. Представленная сравнительная характеристика различных научно-методических подходов к реформированию отечественного общего математического образования в отечественной педагогике в период 1960–1980-х годов содействует обогащению *методики общего математического образования*.

5. Прогнозная оценка возможностей использования учебных и методических пособий по математике периода 1960–1980-х годов в современных условиях и определения перспективных направлений их развития содействует *подготовке к изданию федерального комплекса учебников математики в сфере общего математического образования*.

Практическая значимость заключается в том, что:

1. Результаты исследования, сформулированные выводы и предложения являются научным основанием для деятельности по разработке новой концепции математического образования; обоснованные в нем научно-теоретические подходы могут быть применены в рекомендациях по совершенствованию отдельных элементов математического образования: учебно-методических материалов, программ, учебных планов педагогических учебных заведений.

2. Материалы исследования могут быть использованы в учебном процессе педагогических учебных учреждений:

– при изучении дисциплин «История российского образования» и «История профессионального образования и педагогики»;

– при формировании и реализации программ по направлениям подготовки «Педагогическое образование» с профилями «Математика», «Проектирование образовательных программ», «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)» с профилями «Математика, физика», «Математика, информатика», «Математика, экономика», «Математика и компьютерные технологии», «Математика» с профилем «Преподавание математики и информатики»; Математика с профилями: «Математика», «Математическая подготовка преподавателя высшей школы»; «Педагогическое образование» с профилями подготовки: «Теория и методика математического образования»; «Инновационные технологии подготовки учителя в образовательной области “Математика и информатика”»; «Базовое и углубленное обучение геометрии в общеобразовательных организациях»; «Методика углубленного непрерывного обучения математике»;

– при подготовке соответствующих разделов учебников и учебных пособий для студентов педагогических колледжей и университетов, осуществляющих подготовку будущих педагогов математики: «Государственная политика в сфере педагогического образования (середина и конец XX века)», «Реформирование математического образования», «История отечественной школьной математики середины XX века»;

– для подготовки и проведения спецкурсов и семинаров, посвященных математическому образованию и его истории.

Этапы исследовательской работы. Исследование проводилось с 2021 по 2024 год и включало три этапа.

На первом этапе (2021 год) была создана *эмпирическая модель исследования,* определены основные элементы научного аппарата исследования: сформулированы цели и задачи; выбрана методология исследования; зафиксированы хронологические границы исследования; сформированы списки литературных источников: диссертаций и монографий, а также иных исследований для дальнейшего анализа.

На втором этапе (2022 год) сформировалась *историко-педагогическая модель исследования*. Было осуществлено определение тенденций и предпосылок в развитии общего математического образования; осуществлен анализ результатов вступительных испытаний абитуриентов 1970-х годов, а также последующая систематизация полученных результатов. На данном этапе началась подготовка к апробации результатов путем их публикации в научных статьях и выступлениях на международных научно-практических конференциях.

На третьем этапе (2023–2024 годы) формировалась *методологическая модель исследования*. На данном этапе происходило переосмысление полученных данных исследования, раскрывающихся на основе различных источников. Данный этап связан с систематизацией результатов исследования, а также с оформлением результатов в виде диссертации. Была осуществлена публикация статей, отражающих проблематику исследования.

Апробация и внедрение результатов исследования осуществлялись посредством публикаций его результатов в научных статьях по теме работы. Всего диссертантом опубликовано 6 работ общим объемом 10,97 усл. п. л.

Основные положения исследования докладывались на:

1. Международной научно-практической конференции – XXXVI сессии Научного совета по проблемам истории образования и педагогической науки при отделении философии образования и теоретической педагогики Российской академии образования «Реализация идейного потенциала историко-педагогического знания в контексте современной образовательной политики» (Оренбург, Оренбургский государственный педагогический университет, сентябрь 2023).

2. Международной научно-практической конференции – XXXVII сессии Научного совета по проблемам истории образования и педагогической науки при отделении философии образования и теоретической педагогики Российской академии образования «Национальное единство и региональное многообразие историко-педагогических интерпретаций прошлого и настоящего в развитии педагогической науки, системы образования и семьи» (Калуга, Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского, сентябрь 2024).

3. Международном креатив-форуме «Социальная дидактика: за пределами привычных понятий» (Москва, МГПУ, март 2023).

4. VIII международной научно-практической онлайн-конференции «Обнаружение заимствований 2023» (Москва, октябрь, 2023).

5. V международной научно-практической конференции «Образование, обучение и воспитание: актуальные вопросы теории и практики» (Пенза, июль 2024).

Положения и выводы диссертации прошли обсуждение на заседаниях департамента педагогики ИППО Московского городского педагогического университета (2021–2024).

Личный вклад автора состоит в том, что выделены и охарактеризованы предпосылки и основные этапы процесса реформирования общего математического образования; репрезентированы основные научно-педагогические подходы к реформированию математического образования; проанализированы учебные программы по математике для основной школы разных периодов (1960-х; 1970-х; 1980-х годов); рассмотрены учебные пособия по математике 1960–1970-х годов, а также произведена их сравнительная характеристика; проанализированы и охарактеризованы методические особенности в преподавании математики разных периодов.

Достоверность и обоснованность результатов и выводов исследования обеспечивает совокупность следующих положений:

1. Опора на системный характер теоретико-методологических оснований позволяет рассматривать предмет исследования как систему взаимосвязанных элементов и выявить закономерности, которые определяют его функционирование и развитие.

2. Многообразие источникового материала дает возможность получить адекватное представление о предмете исследования и сделать обоснованные выводы.

3. Использование системы исследовательских методов позволяет выбрать наиболее подходящие решения конкретных задач исследования и получить достоверные результаты.

4. Преемственность и последовательность в реализации исходных теоретических положений обеспечивают логическую связь между различными этапами исследования и позволяют избежать противоречий в выводах.

В целом эти положения обеспечивают научную обоснованность исследования и позволяют получить достоверные результаты и выводы.

Положения, выносимые на защиту:

1. Соотношение понятия «модернизация» с дефиницией «реформирование» в плане трансформаций и обновления образования основывается на понимании их как связанных, но не сводимых друг к другу. Модернизация образования – процесс и результат приведения ключевых характеристик общего образования в соответствие с актуальными характеристиками общества на данном этапе, перспективными вызовами и трендами, в соответствии с которыми проектируется социально-экономическое развитие. Реформа образования представляет собой внедрение изменений (преобразований) в образовательную систему и образовательный процесс для повышения их результативности и эффективности, оцениваемых с позиций целей реформы.

2. На процесс реформирования математического образования приоритетно влияли социально-политический, социально-экономический и научно-педагогические факторы, которые в значительной мере определяли его динамику. Поскольку система среднего образования не только обусловливается общественными параметрами, но и сама оказывает непосредственное влияние как на экономическое, так и на политическое развитие общества, то изучение этой взаимосвязи дает возможность адекватно отрефлексировать процесс реформирования сферы математического образования. Вместе с тем, реформирование общего математического образования во второй половине 1960-х – первой половине 1980-х годов выступало процессом в большей степени субъективным и зависело непосредственно от воззрений на математическую науку авторов реформы.

3. Потребность в повышении качества преподавания математики в 1970-х годах была вызвана не только внутренней эволюцией отечественной педагогики, но и влиянием актуальных тенденций в развитии математики как науки за рубежом. Процесс реформирования математического образования в СССР и в зарубежных странах в 1950–70-е годы происходил синхронно, объединенный одной общей парадигмой теоретико-множественного подхода, что создавало основу для конвергенции идей.

4. Пик разработки исследуемой проблемы приходился на конец 1960-х–1970-е годы, когда осуществлялись целенаправленные попытки реформировать школьный курс математики на основе принципа научности. В школьный курс математики в СССР теоретико-множественный подход внедрялся не так концентрированно, как это было в зарубежных странах. В процессе реформирования содержания общего математического образования выделяются следующие взаимосвязанные периоды: *концептуально-программный* период реформирования содержания школьного математического образования охватывает 1967–1969 годы; *апробационно-внедренческий* период включает 1970–1976 годы; *рефлексивный период* охватывает 1977–1980-е годы.

5. В целом период 1960–1980-х годов характеризуется значительными изменениями в общем математическом образовании. В данном периоде были сформированы несколько научно-методических подходов к модернизации математического образования, которые впоследствии получили развитие как научно-педагогические парадигмы: выразители знаниевой парадигмы «классической математики» (Л.С. Понтрягин, В.И. Арнольд и другие), сторонники научной (теоретико-множественной) парадигмы (А.Н. Колмогоров, А.И. Маркушевич и другие).

6. В 1970-х годах произошло противодействие сторонников знаниевой парадигмы классической математики и научной (теоретико-множественной) парадигмы. Обе парадигмы основывались на принципах научности, идейности

(партийности), практико-ориентированности и доступности. Однако эти принципы различались по степени приоритетности и целевому содержанию.

7. В знаниевой классической математике образование было *доступным* для понимания массового, специально не мотивированного ученика. Эта парадигма готовила специалистов для индустриально-аграрного общества. Важными были принципы идейности и практической ориентации, а научная обоснованность не имела большого значения. В парадигме «классическая математика» самым уязвимым принципом являлась научность. Именно призывы «избавиться от устаревших элементов школьной математики» и «соответствовать современным научным достижениям» стали ключевыми в критике этой парадигмы.

8. В рамках научной (теоретико-множественной) парадигмы образования, готовившей специалистов для индустриального и постиндустриального общества, ведущим принципом являлась *научность*. Главной целью реформы математического образования было повышение теоретического уровня знаний учащихся, что подразумевало необходимость построения содержания школьной математики в соответствии с современными достижениями этой области знаний как науки. Основная критика реформы общего математического образования в 1970-х годах была связана со сложностью учебного материала для учеников после внедрения теоретико-множественного подхода. Школьная математика перестала развиваться эволюционно, улучшая качество содержания образования. Вместо этого образование по математике сосредоточилось на развитии формальных и операционных навыков, что затрудняло понимание учениками абстрактных концепций и структур высшей математики.

9. Комплекс политических, экономических, социальных и научных факторов создал в 1960–1970-е годы благоприятные условия для смены в системе общего математического образования устоявшейся парадигмы классической математики на научную (теоретико-множественную) парадигму, которая была интегрирована в школьный курс математики. Однако эта научная революция в то время так и не

произошла, и возобладала модернизированная парадигма классической математики.

10. Процесс реформирования отечественного общего математического образования во второй половине 1960-х – первой половине 1980-х годов характеризовался следующими стратегическими тенденциями: усиление научности содержания образования в курсе математики при прямо пропорциональном снижении его доступности в общеобразовательной школе; возрастание преемственности и межпредметных связей в курсе математики; появление новых тем, которые преимущественно изучались в высшей школе (элементы дифференциального и интегрального счета, основы теории вероятности и элементы комбинаторики); усиление внедрения в содержание школьного курса математики основ работы ЭВМ и элементов программирования; переосмысление многих принципов и функций учебника математики: традиционно он воспринимался как инструмент, который строго представляет учебный материал, но в процессе реформирования по нарастающей учебник стал массовой образовательной книгой, которая не просто излагала предмет, но и задавала методы деятельности, необходимые для усвоения знаний; развитие дифференциации процесса обучения математике (введение факультативов, создание специальных математических классов и школ, физико-математических интернатов).

11. Реформирование математического образования 1970-х годов требовало внедрения инновационных идей в организацию учебного процесса по математике, что, в свою очередь, способствовало дальнейшему развитию отечественной психолого-педагогической науки. Так, в данный период идея проблемного обучения заняла ведущее место в процессе обучения математике. Обратившись к современному состоянию образования, можно отметить, что проблемное обучение также занимает ведущую позицию во ФГОС. Соответственно, реформа математического образования 1970-х годов определила вектор развития организации обучения и методики преподавания школьной математики.

Структура диссертации: диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, состоящего из 229 источников. Общий объем текста диссертации составляет 285 страниц, содержит 20 таблиц и 6 рисунков, систематизирующих и иллюстрирующих теоретический и эмпирический материал.

ГЛАВА 1. ПРЕДПОСЫЛКИ И ГЕНЕЗИС ПРОЦЕССА РЕФОРМИРОВАНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ОБЩЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ПЕДАГОГИКЕ1960–1980-х ГОДОВ

1.1 Социальные предпосылки реформирования содержания отечественного общего математического образования

1.1.1 Социально-политические и социально-экономические предпосылки развития системы общего математического образования

Во второй половине 1950-х – 1960-х годах в советском государстве и обществе произошли значительные позитивные изменения в политической, социальной и экономической сферах, которые опосредованно привели к серьезной трансформации науки и системы образования.

Политические преобразования обусловили возникновение демократических тенденций в обществе, способствуя отходу от тоталитаризма, монополизма и авторитаризма. Это, в свою очередь, стимулировало активизацию творческой и инновационной деятельности в науке, культуре и образовании. В 1950-х – середине 1960-х годов наблюдалось дальнейшее распространение демократических ценностей, проявлявшихся в гуманизации отношений в учебной и внеучебной деятельности. Это способствовало большей самостоятельности и свободе выбора содержания методов и форм образовательной деятельности, выражалось в ослаблении авторитарного подхода в педагогической деятельности [167].

Период второй половины 1950-х – 1960-х годов неразрывно связан с *мощным научно-техническим прогрессом* в СССР. В это время были осуществлены важнейшие научные открытия и достижения, такие как освоение космоса: запуск первого искусственного спутника и первого человека в космос; создание ракетно-ядерного щита; применение в промышленности мирного атома. Все эти достижения доказали высокое качество физико-математического обучения, которое занимало базисное место в сфере высшего и общего образования, определяло не только опережающее развитие науки, но также высокий уровень социально-экономического развития страны [171].

К 1965 году планировалось, что СССР станет ведущей страной в мире как по общему объему производства, так и по объему производства на душу населения, опередив тем самым развитые капиталистические страны. Для реализации крупномасштабных планов было необходимо много талантливых и высококвалифицированных кадров во всех отраслях хозяйства, науки и культуры. Развитие средств ЭВМ и постепенная компьютеризация ориентировались на специалистов, которые могли работать на новом и современном оборудовании, способных производить точные расчеты при работе на производстве. Для этого требовалась многоэтапная подготовка будущих специалистов-математиков, начиная со школы [167].

Экономические преобразования проявлялись в интенсивном развитии промышленного производства, которое получало поддержку от аграрного сектора. Это способствовало улучшению материального благосостояния населения, внедрению новых технологий в сельском хозяйстве, а также освоению целинных земель и обширных территорий для промышленного и жилого строительства.

Указанные факторы оказывали существенное влияние на работу образовательных учреждений, которые акцентировали внимание на подготовке учащихся к участию в производственной деятельности. Это выражалось в усилении практической направленности учебного процесса, которая проявлялась в политехнизации содержания образования и осуществлении трудового воспитания. На данной основе осуществлялся учебно-воспитательный процесс, что способствовало подготовке квалифицированных специалистов, готовых к вызовам времени [203].

В свою очередь, продуктивные политические и экономические преобразования повлекли за собой *позитивные социальные изменения в обществе.* Успехи в экономике, победа в Великой Отечественной войне, покорение космоса и демократизация общества обеспечили социальную стабильность, уверенность в будущем и обусловили социальный оптимизм. Это сформировало потребность в активной жизненной позиции, что способствовало развитию самоорганизации и творческой инициативы, в том числе в сферах науки и образования. Педагоги стали акцентировать внимание на развитии творческого мышления, социализации и подготовке учащихся к жизни [205].

В целом произошедшие многоаспектные изменения оказали значительное влияние на систему образования. Новый политический контекст способствовал возникновению инновационных подходов к образовательному процессу, требуя адаптации школьной системы к изменяющимся социальным условиям. Ведущими тенденциями развития системы образования становились:

– демократизация школьной жизни, определенная гуманизация процессов обучения и воспитания;

– практическая направленность образовательной деятельности школы, что проявлялось в политехническом подходе к учебному процессу и формировании трудовых навыков у учащихся.

Таким образом, в рассматриваемый период система образования стала более открытой и ориентированной на потребности общества и личности, что вызвало необходимость инновационного пересмотра содержания, форм и методов обучения. Инновационный дискурс включал в себя массовый педагогический поиск, становление авторских школ (пока без употребления этого названия), ориентированных на сочетание теоретических знаний и практических умений в осуществлении учебной и внеучебной деятельности. Все это дает основания рассматривать данный период как стратегический в развитии советской педагогической науки и образовательной практики [203].

1.1.2 Реформирование системы общего образования в соответствии с законом «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР» (1959)

В конце 1950-х годов в СССР разворачиваются процессы реформирования системы образования [193]. 24 декабря 1958 года Верховным советом СССР был принят закон «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР» [146, с. 53]. Обоснованием принятия данного закона являлось создание необходимых условий для общественного прогресса, взаимосвязанного в то время с целями коммунистического развития СССР. Отмечалось, что «перспективы технико-экономического развития СССР предъявляют все более высокие требования ко всем труженикам нашего общества. Разностороннее образование становится для них насущной потребностью» [146, с. 54].

В законе правомерно обращалось внимание на существенные недостатки системы образования, в частности, общеобразовательная и высшая школы признавались «отстающими от требований коммунистического строительства», констатировался разрыв между учебным процессом и реальной жизнью, фиксировалась недостаточная подготовленность выпускников школы к практической деятельности [36, с. 2].

Основной задачей советской школы становилась подготовка учащихся к предстоящей трудовой деятельности, образовательные учреждения должны были «готовить школьников к жизни и труду». Отмечалось, что «интересы развития производительных сил и дальнейшего роста культуры народа настоятельно требуют значительного повышения качества знаний учащихся, лучшей подготовки их к общественно полезному труду» [146, с. 220].

Это включало в себя дальнейшее повышение уровня общего и политехнического образования, «формирование образованных людей с хорошими знаниями в области наук». Ключевым принципом образовательного процесса в средней школе должна была стать тесная интеграция обучения с трудовой деятельностью и социальной практикой.

Согласно закону, образовательное учреждение становилось «средней общеобразовательной трудовой политехнической школой с производственным обучением». Для «укрепления связи школы с жизнью» было решено интегрировать трудовую деятельность на производстве с учебной деятельностью в школе: «начиная с 15-16-летнего возраста, осуществляется на основе соединения обучения с производительным трудом с тем, чтобы вся молодежь в этом возрасте включалась в общественно полезный труд» [146, с. 56]. Для достижения поставленной цели необходимо было создать определенные материально-технические условия для школ и на производстве.

В данной связи всеобщее семилетнее обучение было заменено на обязательное восьмилетнее обучение, соответственно, полное среднее общее образование было также увеличено с 10 до 11 лет обучения. Увеличение срока обучения на один год, а также политехнизация образовательного процесса школы потребовали значительного пересмотра учебной программы, содержания среднего образования, а также учебных пособий [159]. При этом какие-либо определенные требования к содержанию учебных предметов в законе не были сформулированы. Менялись не только содержание, но и методики обучения – акцент делался на развитие самостоятельности и инициативности учащихся [78].

В структуре и учебных планах средних школ были запланированы значительные изменения. Система образования была разделена на два этапа: восьмилетняя обязательная трудовая политехническая школа для всех детей и учебные заведения, обеспечивающие полное среднее образование (общеобразовательные трудовые политехнические школы с профессиональным обучением, вечерние и заочные школы, техникумы и др.). Продолжительность обучения в средней школе составляла три года, выпускники политехнических школ получали обязательную профессиональную подготовку для работы в сфере производства. В содержании общего образования был сделан акцент на практическое применение знаний, особое внимание уделялось труду и практическим занятиям [73].

Закон «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР» положительно повлиял на всю систему народного образования, на изменение структуры учебных планов школ, в том числе и по математике. Для того чтобы обеспечить необходимый уровень политехнических знаний, школа должна была обеспечить изучение математики на достаточно высоком уровне и возможность подготовки к практическим занятиям, таким как сельское хозяйство, машиностроение и электротехника, осуществить проведение экскурсий и учебно-производственных практик, а также создать предпосылки для продолжения обучения в высшей школе.

В данной связи закон стал катализатором преобразование системы математического образования. В контексте политехнизации предстоял коренной пересмотр действующих учебных программ по математике и всей учебно-методической документации, учебников и задачников, эта же задача должна была определять и повседневную преподавательскую деятельность учителя математики. Для ее решения требовались активные поиски новых путей, творческая инициатива всего коллектива советских учителей [167].

Подчеркнем, что закон существенно стимулировал изменение содержания математического образования, увеличение срока обучения, политехнизм, межпредметные связи. Изменение и пересмотр программ содержания математического образования в связи с принятием данного закона были весьма логичными. В содержании математического образования необходимо было отразить связь с сельскохозяйственной и производственной деятельностью. Так, к примеру, в задачниках по математике использовались реальные данные, отражающие показатели добычи полезных ресурсов. Также следовало сделать акцент на развитие у учащихся вычислительных навыков, применимых в производственных условиях [113].

Принятый закон ориентировал учеников на изучение математики с практической точки зрения. Новая программа должна была быть ориентирована на определенный законченный курс математики, который был необходим для практической деятельности, а также способствующий тому, чтобы выпускники школ успешно осуществляли свое профессиональное образование. Таким образом, политехническая направленность преподавания математики была поднята на более высокую ступень: «В результате технические вузы должны были получить абитуриентов с хорошей математической подготовкой, предполагался отсев неспособных к математике учащихся на этапе получения среднего образования» [60, с. 192].

Закон не только изменял содержание учебной программы по математике, но также предполагал изменение методики преподавания математики, делая упор на активизации мотивации к изучению математики, повышению уровня усвоения фактического материала, а также воспитания навыков самоорганизации, умения рационального и творческого выполнения поставленной задачи. Большое внимание уделялось внеклассной работе, которая должна была быть нацелена на развитие способностей учащихся, стимулирование их интереса к математике [187].

Существенно, что закон придал импульс созданию специализированных школ и классов с математическим уклоном, а затем и физико-математических интернатов при университетах.

В 1960-е годы отечественная математическая наука развивалась очень интенсивно и находилась на уровне лучших математических школ мира. Обратим внимание на то, что сфера математики в то время оказалась в приоритетном положении и по личностно-профессиональным обстоятельствам, так как среди видных ученых и ведущих преподавателей высшей школы было много математиков. Выдающимися учеными-математиками, занимавшими должности ректоров МГУ и ЛГУ были Иван Георгиевич Петровский и Александр Данилович Александров. Математик Алексей Иванович Маркушевич с 1958 года занимал пост заместителя министра просвещения РСФСР. Он был учеником выдающегося математика и деятеля науки, руководителя Сибирского отделения АН СССР Михаила Алексеевича Лаврентьева [159].

В конце 1950-х – первой половине 1960-х годов в советском обществе наблюдался заметный рост интереса к математике как дисциплине, а также к вопросам школьного математического обучения. Это явление было обусловлено динамичными темпами научно-технического развития страны, ключевыми событиями которого стали запуск первого искусственного спутника Земли и полет Юрия Гагарина в космос, вызвавших значительный общественный резонанс [60].

В данной связи рассматриваемый период правомерно характеризуется как время расцвета высшего и общего математического образования в СССР. Советское математическое образование по праву было признано одним из лучших в мире. Образовательная модель физико-математического обучения была адаптирована и успешно применена в 1960–1970-е годы несколькими странами и, как правило, приносила положительные результаты. Например, Южная Корея, которая, по сути, заимствовала советскую систему математического обучения, в результате заняла лидирующие позиции на международных математических олимпиадах для студентов [167].

Такие достижения имели вполне определенные и веские причины. Советское политическое руководство проявляло особый интерес к математике с начала 1950-х годов, что обусловливалось необходимостью подготовки специалистов, которые могли бы успешно конкурировать с американскими инженерами в условиях военно-технического противостояния. Помимо этого, после того как кибернетика была восстановлена в правах и официально признана руководством страны, началось активное развитие вычислительной техники. Причем целью было не только опередить уровень развития информационных технологий в США, но и создать централизованную систему управления экономикой СССР [159].

Все эти факторы оказали определяющее влияние на общее математическое образование, определив курс на переработку и перестройку его структуры и содержания. Умение использовать специальные символы, строгость и последовательность их записи, изучение основ математической логики еще в школе должны были стать базой последующей подготовки высококачественных специалистов [144].

Чтобы достигнуть всех этих целей, было принято решение кардинально изменить методы преподавания математики в школах и университетах.

1.2. Формирование теоретической основы реформирования содержания основного математического образования

1.2.1 Международное влияние на реформирование основного математического образования

Движение за реформу математического образования имело международный характер. Его истоками являлась деятельность группы французских математиков Николя Бурбаки, а также возобновление международных математических конгрессов [93].

Методологической основой реформирования отечественного общего математического образования выступил теоретико-множественный подход к изучению основ математики, который в наибольшей мере удовлетворял критерию повышение научности [95].

Идея внедрения в школьный курс математики теоретико-множественного подхода, который изучается в высших технических учреждениях, получает свое воплощение. В рамках данной концепции все математические идеи были изложены на базе аксиоматической теории множеств, отличающейся высокой степенью абстракции.

На Западе в 1930-х годах формируется концепция, которая переосмысливала действующую математику как науку, тем самым запустив процесс развития идеи реформирования математического образования во всем мире. Эта концепция, равно как и внедрение таких понятий, как «группа», «поля», «кольцо» появились во Франции в 1935 году, когда сложилось сообщество молодых ученых-математиков с целью написания новых современных учебников. Данная группа взяла себе коллективный псевдоним Николя Бурбаки, от лица которого издавала свои научные работы [217].

У группы был свой кодекс, попасть в нее могли лишь исключительно талантливые математики до 40 лет, потом они автоматически покидали коллектив. Участие в группе было секретным. В состав группы Николя Бурбаки входили такие известные французские математики, как Г. Вейль, Ж. Дьедоне, Г. Шоке, что выяснилось только тогда, когда эти математики официально заявили, что больше не являются членами данного коллектива [93].

Главными принципами, каким следовала данная группа, являлись строгость, абстрактность и формализм. Бурбаки опубликовали серию книг, причем авторы подходили к данному вопросу очень скрупулезно. Каждый из них сначала работает в одиночку, а затем работа каждого обсуждалась коллективно. Каждое слово и строчку молодые ученые обсуждали до тех пор, пока не получали от каждого члена единодушного согласия, и только после этого публикация рекомендовалась к изданию [225].

Бурбаки предложили аксиоматический метод, рассматривающий математику как целостную науку. Этот подход не был инновационным: подобные идеи объединения математических разделов в единую дисциплину выдвигал в начале XX века известный математик Феликс Клейн [221].

В книгах Бурбаки не было ни рисунков, ни упражнений, во главе находились строгие аксиоматические принципы, которые не должны были в себе нести интуитивных понятий. Вся серия книг целиком и полностью состояла из такого материала, причем авторы принципиально не ссылались на сторонних авторов, каждая последующая книга отсылала к предыдущим, беря определения тех или иных понятий из ранее выпущенных изданий [33].

Один из самых видных членов сообщества Жан Дьедоне критиковал многовековую евклидову геометрию, считая ее уже пережитком старого. Действительно, если разобраться, то не все понятия, изложенные в тех же самых

«Началах» Евклида, имели четкое определение. Так, например, точного определения такого, казалась бы, интуитивно ясного понятия, как «точка», в школьном курсе геометрии не существует [65; 164].

К 1950-м годам Бурбаки получили признание во Франции. Л.С. Понтрягин объяснял это тем, что такая абстрактная теоретико-множественная концепция изложения математики стала популярна вследствие ее новизны. Тем не менее, по мере переводов книг Бурбаки на другие языки число сторонников теоретико-множественного подхода увеличивалось [170].

Многие поддерживали математику Бурбаки, так как она описывала математические понятия абстрактным и аксиоматическим методом. Четкость, доказательность, последовательность изложения материала привлекала сторонники данной идеи и в других странах Европы [16].

Положительное влияние Николя Бурбаки на мировую математику было значительным. По мнению французского математика Анри Картана, оно состояло в том, что аксиоматическое описание простейших понятий преодолевало границы между алгеброй, геометрией, математическим анализом и другими разделами математики. Кроме того, аксиоматическое определение каждого понятия в математике помогало привести в порядок некоторые математические термины, так, например, понятия «сфера» и «шар» стали различными, а не синонимичными [17; 75].

Итак, одним из главных факторов, который повлиял на реформирование математического образования в СССР, являлось влияние подходов группы Никола Бурбаки.

Вместе с тем теории, представленные в трудах Бурбаки и известные под названием «бурбакизм», часто подвергались критике со стороны известных математиков. Их обвиняли в чрезмерной формализации и в том, что они «убивают дух математики». Критики концепций группы Николя Бурбаки отмечали, что среди французских математиков преобладало желание жить и работать в «башне из слоновой кости», для французов характерно увлекаться абстрактными занятиями [8].

Представители АРМЕР (Ассоциация профессоров математики общественного управления) высказывали недовольство по поводу реализации реформы. Президент ассоциации и сторонник этих изменений предложил на некоторое время остановиться. В 1974 году Пьер Самюэль и Жан Дьедонне, также поддерживавшие реформу, начали испытывать сомнения относительно целесообразности преподавания современной математики [71; 164].

В середине 1970-х годов математик Ален Мармье отмечал, что «критика больше не ограничивалась несколькими недоброжелателями, она начала распространяться среди ученых, общественности и прессы. Отовсюду слышалось осуждение чрезмерной абстрактности, сложности новых программ и догматизма». Как отметил А. Мармье, наибольшее количество критики вызвала «абстрактность используемого языка, который, будучи интегрированным в определенные процессы, порой становился совершенно нелепым» [224].

Одним из наиболее заметных критиков подхода Николя Бурбаки в России был академик АН СССР В.И. Арнольд, который подчеркивал, что «для Бурбаки все общие понятия важнее их частных случаев, поэтому все нестрогие неравенства являются фундаментальными, а строгие – маловажными специальными случаями, примерами» [8, с. 246].

Действительно, участники этой группы обычно придерживались идеалов чистой математики. Многие из них почти не обращали внимания на такие важные области, как дифференциальные уравнения, теория вероятностей, математическая физика, а также прикладные аспекты, включая численные методы и математическое программирование, что особенно заметно в их совместном труде [33].

Другим методологическим источником реформирования математического образования в СССР стали **Международные конгрессы математиков.**

В 1954 году в Амстердаме прошел XII Международный конгресс математиков, на котором возобновила свою деятельность *международная комиссия по математическому образованию.* В рамках одной из секций профессор математики из Югославии Джуро Курепа представил свой доклад. Он отметил, что *современные математические концепции, такие как множества, соответствия, взаимосвязи и структуры, предоставляют более эффективный подход к пониманию математики,* чем это было ранее. На основании этого он пришел к выводу, что школьное математическое образование должно развиваться в этом направлении, опираясь на идеи Бурбаки [213; 223].

Следует подчеркнуть, что на XII международном конгрессе математиков присутствовал А.Н. Колмогоров, который выступил с заключительным пленарным докладом. В тот период А.Н. Колмогоров высоко ценил свои профессиональные связи с математиками из Франции [181].

В июле 1956 года в Женеве состоялась XIX международная конференция по государственному образованию. Программа включала три основных направления, одно из которых касалось вопросов преподавания математики в средних учебных заведениях. СССР на этом мероприятии представлял Алексей Иванович Маркушевич.

Выдающийся психолог Жан Пиаже сделал доклад о математическом образовании в средней школе. Он, ссылаясь на концепцию Бурбаки, обосновал *необходимость внедрения некоторых обобщенных идей современной науки в структуру школьного курса* [229].

Одним из ярких сторонников изменения подхода к преподаванию математики в школьной системе был профессор университета Лондона и секретарь международной комиссии по математическому образованию Калеб Гаттиньо. Он поддерживал идеи группы Бурбаки и высказывал мнение о *необходимости смещения акцента с частного на общее*, в отличие от предыдущей практики, которая следовала обратному пути [216].

В 1962 году на XIV Международном конгрессе математиков в Стокгольме рассматривались перемены, происходящие в математической науке, обсуждалась необходимость реформирования математического образования и внедрения новых концепций в данную сферу. Было подчеркнуто, что многие страны выступали за включение в школьный курс основ теории множеств, базовых элементов математической логики, современных элементов алгебры (группы, кольца, поля, векторы), а также начальных знаний по теории вероятностей и статистике. Конгресс отметил необходимость обновления математической терминологии и символики. Кроме того, было выдвинуто предложение об исключении из школьного обучения ряда традиционных областей математики, таких как элементарная геометрия, тригонометрия и сокращенная арифметика [213].

В отчете комиссии по математическому образованию акцентировалось внимание на необходимости обновления языка и структуры знаний в школьной математике. Планы по изменению учебных программ предусматривали введение материалов с высоким познавательным потенциалом, таких как векторы, координатные методы, производные и интегралы, основные идеи дифференциальных уравнений как универсального инструмента для описания природных и технических явлений, гармонические колебания и основы теории вероятностей. Также был запланирован более детальный анализ сути аксиоматического метода, особенно в контексте понятий групп, колец и полей [73].

В рекомендациях международной конференции по школьному математическому образованию, прошедшей в Афинах в 1963 году, было подчеркнуто, что центральными концепциями школьного курса математики являются понятия множества, отношения и функции. Также акцентировалось внимание на необходимости понимания математических структур, что является ключевым аспектом преподавания [144].

Определяющее значение для реформирования математического образования в СССР имел XV международный конгресс математиков, прошедший в Москве в 1966 году, который существенно поспособствовал содействию реформам в области математического образования и формированию содержания школьного курса математики. В его работе официально участвовали и Бурбаки (по традиции пустое кресло с табличкой в зале) [93].

В программе конгресса одна из секций была специально посвящена вопросам реформирования школьного математического обучения. На ней выступил профессор Брюссельского университета Жорж Папи, который был сторонником современной математики, основанной на теоретико-множественном подходе. Он изложил программу эксперимента по математике для детей с 12 до 17 лет. В данной программе Папи утверждал, что «математика должна включать множества, отношения, графы, группы, векторные пространства, начала математического анализа и дифференциального и интегрального исчисления» [227, с. 14].

Но А.Н. Колмогоров в своем докладе предостерегал и «от пренебрежения сложившимися традициями и конкретным материалом, имеющим непосредственную убедительность и применимость в естественных науках и технике» [131, с. 15], и подчеркивал, что «нередки случаи неумелой модернизации школьного курса, в частности в связи с неумеренными попытками все аксиоматизировать» [131, с. 15]. В качестве примера академик указывал, что национальный комитет английских учителей рекомендует в розданной на конгрессе брошюре для школьного использования аксиоматику теории вероятностей, смысл которой остается непостижимым специалистам по теории вероятностей, которым А.Н. Колмогоров ее показывал. Ученый был убежден, что «школьная программа, обязательная для всех, должна включать основные разделы сложившегося курса (включая понятия производной и интеграла), а также понятие вероятности и принципы действия счетно-электронных машин… Что касается общей идеи векторного пространства, то она вряд ли сможет занять здесь вполне убедительное место» [131, с. 14].

В целом Конгресс стал катализатором для реформы основного общего математического образования в СССР, в результате чего вскоре были разработаны новые образовательные программы и созданы учебники, которые сразу начали использоваться в образовательных учреждениях.

В 1970-х годах началось реформирование содержания общего математического образования в зарубежных странах, включая Францию, США, Бельгию, Польшу. Математическое образование, как в мире, так и в СССР, подвергалось значительному влиянию идей Николя Бурбаки. Следует подчеркнуть, что их концепции активно использовались в советской и зарубежных образовательных системах [93; 212]. Реформа математического образования во Франции действительно страдала преувеличенным «бурбакизмом». В 1978 году «эти излишества были устранены, и новый, введенный вариант программы в отношении пользования общими теоретико-множественными понятиями приблизился к тому, что было принято в СССР» [95, с. 149].

Под влиянием данных тенденций во многих западных странах началось реформирование общего математического образования – «new math». Например, в 1960-х годах в Бельгии стартовала экспериментальная программа, разработанная Ж. Папи, а в Италии подобные подходы внедрил математик Э. Кастельнуово. Во Франции новые образовательные программы, построенные на этих основаниях, появились в 1969 году. По данной реформе в преподавании математики ведущее место отводилось внедрению в школьный курс математики новых разделов: теории множеств; двоичной системы счисления; элементов математической логики. Большое значение придавалось активным формам преподавания, с помощью которых ученики самостоятельно «открывали» для себя знания [214; 215].

Однако в странах западной цивилизации реформирование общего математического образования по охарактеризованным лекалам также не доказало свою продуктивность. В 1972 году в Эксетере, Великобритания, состоялся Второй Международный конгресс по математическому образованию (ICME), на котором в своем докладе французский математик Рене Фредерик Том, впоследствии ставший членом Французской академии наук, выразил свои сомнения относительно модернистского подхода к преподаванию математики в школе [196].

В докладе «Развитие математической активности учащихся и значимость проблем в этом процессе», подготовленном профессором А.С. Крыговской из Краковского педагогического института по поручению Международной комиссии по математическому обучению (ICMI), при опоре на материалы девяти подкомиссий из различных стран (СССР, Англия, США, Норвегия, Швеция, Германия, Бельгия, Венгрия, Польша) констатировалось, что «аксиоматическое построение современного курса школьной математики не согласуется со свободным поиском тем и приемов учащимися… Исключение классической евклидовой геометрии из школы привело к забвению традиционных тем» [222, с. 23].

Критика учителей и отрицательный настрой родительской общественности к построению курса “new math” привели к отмене инноваций. Так, например, в США отмечались характерные трудности внедрения абстрактных математических понятий в начальную школу.

Во Франции в 1970-е года реформа «Mathématiques Modernes» подверглась критике стороны общественности в силу того, что новая учебная программа также трудно усваивалась обучающимися. В 1976 году известный французский математик Жан Лере, который был академиком Парижской академии наук и иностранным членом Академии наук СССР, выступил на Панафриканском математическом конгрессе, где отметил, что «попытки реформ в области математики во Франции основывались на самоуверенности и непонимании, что неизбежно привело к серьезным последствиям» [70].

Под большим давлением общественности, а также в связи с разногласиями в научно-педагогических кругах данная реформа во Франции была приостановлена, а затем полностью отменена. Главной причиной отказа от реформы являлось то, что в учебниках искажалась «современная математика», которая была оторвана от реальности [225; 226].

Таким образом, можно констатировать, что в период 1970-х годов за рубежом теоретико-множественная концепция, обладая высокой степенью абстракции, приобрела популярность и начала доминировать над практическими исследованиями. Данные преобразования в системе школьного образования были направлены на увеличение технологического потенциала западных стран.

Для этого времени было характерно появление различных экспериментальных программ по математике в школе, которые основывались на интеграции теоретико-множественного подхода, а также других абстрактных математических понятий в школьный курс.

Однако подход на основе теории множеств является всего лишь удобным языком для профессиональных математиков при проведении научной работы. В действительности развитие математики ориентировано на решение конкретных задач и применение в практике.

Характерно, что введение сложных и абстрактных понятий в начальной школе, а также разработка на этой основе учебных материалов не позволили в зарубежных странах добиться планируемых результатов. В результате высокий научный уровень изучаемых математических понятий, а также некачественная разработка учебников привели к возвращению в странах Европы и США традиционной системы математического образования к концу 1970-х годов. [214; 228].

Движение по переосмыслению принципов преподавания математики также существенно повлияло на реформирование математического образования в СССР. В данной связи отмечалось, что «для уменьшения разрыва между содержанием и уровнем школьного образования и успехами научно-технического прогресса в наши дни весьма существенное значение имеет быстрое нарастание темпов «приручения» новых понятий и идей» [133, с. 5].

Отметим, что критика реформы математического образования за рубежом в 1970-е годы была сущностно идентична критике реформы со стороны советских ученых – математиков и педагогов, но все недостатки тогда приписывали тому, что педагогическое сообщество, учителя математики не готовы к преподаванию на высоком уровне сложности: «те трудности, которые уже обнаружились на практике, объяснялись главным образом новизной подхода и неподготовленностью учителей» [93, с. 220].

Министерство просвещения СССР во главе с министром М.А. Прокофьевым, а также Академия педагогических наук СССР, которые выступали основными инициаторами реформы, продолжали утверждать, что существующие трудности в осуществлении реформы можно преодолеть, как только будут вновь доработаны образовательные программы и учебники. При этом часть преподавателей математики, в частности методисты из педагогических вузов, активно поддерживали идеи научного подхода к обучению [93].

Итак, безусловно, реформа содержания общего математического образования в СССР во второй половине 1960-х – 1970-е годы получила свою теоретическую направленность, во многом из-за влияния ученых из европейских стран, которые включали в учебные планы и программы по математике новые разделы, стремились привести в соответствие содержание общего математического образования с современными требованиями развития науки и техники. За рубежом в данный период также происходили аналогичные реформационные процессы, что способствовало международному обмену опытом реформирования, но общие трудности во внедрении новшеств в международном и отечественном контекстах подчеркивали необходимость продуманного подхода к образовательным реформам [57].

Реформа преподавания математики в зарубежных странах характеризовалась отрицанием геометрических подходов, избыточными и сложными «псевдонаучными» определениями и абстрактностью алгебры, которая зачастую оказывалась далека от практического применения. Эти аспекты отчетливо указывают на определяющее влияние на модернизационные процессы представителей школы Николя Бурбаки, которые выступили инициаторами данной реформы [159].

1.2.2 Тенденции повышения научности математического образования в СССР в 1930-е – первой половине 1960-х годов

Существенным источником и предтечей реформирования математического образования в СССР выступала предшествующая деятельность математического сообщества по обновлению содержания общего математического образования и повышения его научности, которая включала в себя ряд взаимосвязанных периодов.

1. Первый этап подготовки реформы общего математического образования можно хронологически определить 1932–1941 годами. В период

1930-х годов в СССР разрабатываются первые попытки по повышению качества общего математического образования. Так, 25 августа 1932 года выходит постановление ЦК ВКП(б) «Об учебных программах и режиме в начальной и средней школе» [146, с. 161]. В постановлении отмечался ряд педагогических ошибок в преподавании математики, предусматривалось увеличение часов изучения математики, а также указывалось на необходимость построить «курс математики в начальной и средней школе таким образом, чтобы обеспечить переход к следующим ступеням профтехнического образования» [146, с. 162].

В 1932 году была подготовлена новая программа по математике, которая предусматривала изучение элементов аналитической геометрии и математического анализа в 10 классе. Однако реализовать проект в первоначальном виде не удалось: учащиеся считали материал выпускного класса слишком сложным, и этот период оказался посвящен повторению тем, изученных в 5–9 классах. В итоге концепция функциональной зависимости не стала главной, а геометрические преобразования были исключены из учебного плана. Упрощенная и структурированная программа оказалась более доступной для восприятия учениками [73].

В течение 1933 года ЦК ВКП(б) выпускает ряд постановлений, которые направлены на повышение эффективности деятельности советских школ: «Все их усилия были сконцентрированы на одной-единственной цели – обеспечить все условия для поднятия качества образования на самый высокий уровень» [105, с. 46].

В данной связи в 1933 году было осуществлено введение элементов математического анализа и аналитической геометрии в школьный курс математики. Однако сближение школьной математики с наукой требовало более продуманной системы интеграции элементов математического анализа, а также дальнейшего преобразования школьного курса.

В тот же период в стране были утверждены единые учебники по математике. Некоторые из них были подготовлены советскими авторами, такими как И.Г. Попов («Арифметика»), Ю.О. Гурвиц и Р.В. Гангнус («Геометрия»), а другие использовались еще до революции, например «Алгебра» А.П. Киселева и «Тригонометрия» Н.А. Рыбкина [55; 172; 185].

К 1936 году в СССР возникла необходимость целенаправленного реформирования математического образования, так как качество преподавания в средней школе было признано неудовлетворительным. В декабре того же года на заседании математической группы Академии наук СССР была принята резолюция, в которой указывались недостатки школьной математической программы [60; 182].

В 1939 году известный методист-математик А.Я. Хинчин приступил к разработке реформы общего математического образования. Ученый активно критиковал действующие учебные программы по математике за оторванность от реальной жизни. При этом он считал, что это является не единственным недостатком программ по математике для начальной и средней школы [201; 202].

А.Я. Хинчин подчеркивал, что курс школьной математики не обновлялся на протяжении трех столетий и включал множество устаревших понятий и архаичных упрощенных определений. Он был убежден, что «уровень преподавания математики в средней школе заметно отстает от ее научного развития. Ни в одной другой школьной дисциплине мы не имеем такого положения вещей, когда весь излагаемый материал, за единичными исключениями, слагается из фактов, известных уже в XVII столетии» [202, с. 4].

А.Я. Хинчин предлагал существенно модернизировать школьное математическое образование, так как действующее содержало множество архаичных понятий, которые не используются в науке. Таким образом, реформирование образования, по мнению ученого, должно было основываться на повышении научности и строгости изложения учебного материала. Все это предполагало соответствующую переподготовку учителей математики и методистов [201].

Занимая официальную должность председателя Математического комитета при Наркомпросе РСФСР, А.Я. Хинчин осуществил цикл резонансных публикаций на эту тему и читал лекции для педагогов, активно развивая и обосновывая концепцию предстоящих изменений.

Особо отметим научный поиск ведущего математика И.В. Арнольда, который в 1941 году защитил диссертацию на степень доктора педагогических наук по знаковой теме «Теоретическая арифметика». Это свидетельствовало о нарастающем значении повышения научного уровня школьной математики [9].

2. Второй период подготовки реформы общего математического образования можно хронологически определить 1943–1955 годами. Начало Великой Отечественной войны замедлило процесс реформирования, но планы по модернизации курса арифметики и внедрению математического анализа в учебный план лишь были отложены. Уже в 1943 году ученые и методисты разработали проект программы по математике для 5–10 классов, в котором была особо подчеркнута значимость *теоретических знаний в их практическом применении*. Большое внимание уделялось изучению функциональной зависимости, подчеркивалось, что «овладевая темой “Функции и графики”, ученики знакомились с разнообразными эмпирическими графиками (скорость резания металла, движение поездов и т. д.)» [171].

С 1947 года возобновились работы над проектированием новых учебных программ по математике. Был составлен базовый учебный план и примерные программы по математике [73].

Первый проект программы по математике был подготовлен в Институте методов обучения АПН РСФСР при участии известных педагогов-математиков И.В. Арнольда, В.Л. Гончарова, Я.С. Дубнова, А.И. Маркушевича и Н.Ф. Четверухина. При подготовке проекта программы уделялось большое внимание современным научным концепциям. Главной целью ставилось сближение математики как учебного предмета с математической наукой в ее современном состоянии.

В целом проект характеризовался значимыми подходами. При разработке программы особое внимание уделялось «актуализации содержания в соответствии с современными достижениями математической науки. Это включало в себя, прежде всего, понятия переменной величины, функциональной зависимости и преобразования в геометрии, а также ознакомление школьников с основными классическими методами, такими как элементы анализа и аналитической геометрии» [145, с. 7].

Однако обсуждение этого проекта привело к тому, что он был отвергнут. Несмотря на то, что проект не был реализован, некоторые его значимые идеи нашли отражение в программе по математике 1948 года, которая целенаправленно акцентировала внимание на теоретических аспектах и практическом применении курса. Подчеркивалась значимость выполнения различных практических заданий в процессе изучения арифметики. Активно развивалась концепция функциональной зависимости, что способствовало более глубокому усвоению материала в старших классах. Алгебраический курс был направлен на формирование функциональной грамотности и предусматривал интеграцию с другими предметами, такими как химия, физика и астрономия. Также были представлены практические применения в областях сельского хозяйства, техники и военного дела.

Курс геометрии фокусировался на развитии пространственного мышления, логики и навыков решения конструктивных и вычислительных задач. Учащиеся также осваивали умения, связанные с практическими работами: измерительными действиями на местности и расчетом площадей и объемов различных объектов. Особое внимание уделялось решению стереометрических задач с использованием проекционных чертежей. По программе по математике 1948 года, которая претерпевала некоторые изменения и модификации, преподавание продолжалось до 1954 года [167].

29 июня 1949 года на сессии Академии педагогических наук РСФСР А.И. Маркушевич представил доклад под названием «О повышении идейно-теоретического уровня преподавания математики в средней школе», в котором последовательно подчеркивал необходимость изменений: «Содержание школьных

программ и учебников по базовым предметам шагнуло так далеко вперед и пропитано идеями передовой советской науки, что сама идея использования старого гимназического учебника по этим предметам показалась бы абсурдной» [130, с. 1].

Вместе с тем, при обновлении школьного математического образования, а также усилении политехнической направленности, требовались новые методы и приемы взаимодействия с учениками. В целом послевоенный период характеризовался большой творческой активностью учителей математики. Разрабатывались новые способы организации педагогической деятельности, которые делали уроки математики более доступными и творческими. Различные вопросы методики математики обсуждались на педагогических чтениях, проводимых Академией педагогических наук с 1945 года [171].

На XIX съезде Коммунистической партии Советского Союза, состоявшемся в октябре 1952 года, было обозначено два ключевых направления развития системы общего образования:

1) улучшение политехнического образования;

2) подготовка к введению обязательного среднего образования [203].

Чтобы достичь первой цели, предлагалось увеличение математической составляющей в учебных планах по физике, химии и астрономии. К примеру, подчеркивалось, что изучая такие аспекты физики, как механика и оптика, учащимся необходимы прочные основы геометрии. В органической химии важно знание стереометрии для понимания сложных молекул и расположения атомов. Без хорошей геометрической подготовки нельзя успешно заниматься геодезией или строительством, а также решать практические задачи, связанные с резкой материалов. Кроме того, математические навыки необходимы и в военной сфере, где требуется точность в расчетах угла для артиллерийского снаряда [221].

В данной связи было создано несколько проектов учебных программ по математике, которые легли в основу учебной программы на 1954/1955 учебный год, ориентированной на принципы политехнического обучения. В объяснительной записке акцентировалось внимание на практической направленности математического образования в школе, однако теоретическим аспектам также уделялось значительное внимание.

Историк математики Ю.М. Колягин подчеркивал, что в обновленной программе по математике, принятой на 1954–1955 учебный год, совершенствовалось содержание математического образования. В программу 1954 года вошло изучение понятия производной, акцент сделан на функции и методы ее графического представления. Особое внимание уделялось развитию расчетных и конструкторских навыков у учащихся. Акцент в связи с задачами политехнического образования смещался на умение школьников работать с таблицами, логарифмической линейкой, расчетными приборами и чертежными инструментами, а также на овладение навыками моделирования и проведения измерений на местности. При определении целей изучения алгебры акцентировались ключевые моменты: составление и решение уравнений, навыки тождественных преобразований, освоение концепции функции с ее графическим отображением, развитие представления о числе. Указывалась взаимосвязь между этими знаниями и решением задач в области физики, астрономии и химии. Цели преподавания математики включали изучение фактического материала и развитие логического мышления, а геодезический практикум играл центральную роль в изучении геометрии и черчения [93].

Программа практических занятий была тщательно разработана для всех классов и включала освоение логарифмической линейки, работы с местностью, моделирование, создание графиков и диаграмм, а также навыки вычислений на счетах и использование таблиц. В процессе обучения математике стали вводиться элементы исторического контекста для развития патриотических чувств и понимания происхождения понятий [102].

В целом к середине 1950-х годов, под влиянием предстоящего перехода на политехническое образование, школьные программы претерпели изменения, внимание акцентировалось на практические умения, такие как работа с таблицами и логарифмической линейкой. Все было направлено на то, чтобы сделать изучение математики более прикладным. Однако в этот период математика в целом в школьной программе оставалась неизменной и традиционной [95].

Учеными – педагогами и методистами математики – в данный период выдвигались значимые предложения по совершенствованию курса общей математики. А.И. Маркушевич в своих исследованиях подчеркивал необходимость изменения структуры и содержания курса алгебры. Он предложил начинать изучение математики с 4 класса, а в 5 классе уже использовать простейшие уравнения и их системы. В своей программе алгебры для семилетней школы ученый рекомендовал ввести понятие рациональных чисел, линейные уравнения с одной и двумя неизвестными, а также квадратные уравнения и графики функций [145].

На обновление преподавания геометрии существенно повлияли исследования Н.Ф. Четверухина, в которых он обосновывал важность применения двусторонней линейки и угольника для решения задач на построение.

В 1953–1954 годах произошли изменения и в подготовке учителей математики. На физико-математических факультетах педагогических институтов были организованы физико-технические отделения [186].

3. Третий период подготовки реформы общего математического образования (1956–1957 годы) обусловлен решениями XX съезда КПСС в феврале 1956 года, на котором была подчеркнута необходимость ознакомления учащихся с ключевыми отраслями современного производства.

Содержательно модернизация курса общей математики началась с издания в 1956 году учебника «Геометрия» для 6–9 классов, утвержденного Министерством просвещения РСФСР. Этот учебник был разработан Н.Н. Никитиным и А.И. Фетисовым, которые стремились создать материал, отличающийся от учебника А.П. Киселева и обеспечивающий переход от визуальных к формально-логическим методам. Однако уже в 1957 году сотрудничество соавторов прекратилось, и учебник Никитина и Фетисова через два года стал менее востребованным, уступив место новому учебнику «Геометрия», который был написан в традициях Киселева [77; 151].

4. Четвертый период подготовки реформы общего математического образования охватывает 1958–1959 годы.

В 1958 году А.И. Маркушевич занял пост заместителя министра образования РСФСР, что открыло для него новые возможности для подготовки реформы содержания общего математического образования. Его начинания получили поддержку членов секции средней школы Московского математического общества. Ведущие члены этой секции, такие как В.Г. Болтянский, Н.Я. Виленкин и И.М. Яглом, составившие позднее ядро когорты реформаторов, опубликовали в журнале «Математическое образование» статью, в которой содержались предложения о введении элементов математического анализа и векторной алгебры в школьную программу. Кроме того, они выступали за полную перестройку учебного курса математики, основываясь на функциональном подходе, и предлагали ряд других значимых нововведений [30].

В 1958 году появился новый учебник по геометрии, основанный на современной научной концепции геометрических преобразований. Его авторами были В.Г. Болтянский и И.М. Яглом. Учебник быстро внедрили в общее образование, заменив предыдущее пособие Киселева. Однако уже через год его использование прекратили по приказу министра просвещения РСФСР – учебник признали некачественным [29].

В 1959 году был представлен тщательно разработанный проект новой учебной программы по математике, авторами которого выступили В.Г. Болтянский, Н.Я. Виленкин и И.М. Яглом. Этот проект включал новые разделы, такие как «Приближенные вычисления и логарифмическая линейка» для 7 класса, «Векторы. Метод координат» для 8 класса и «Геометрические преобразования» для 9 класса. В обновленный раздел «Теория функций» были добавлены темы «Неравенства», «Пределы», «Понятие производной», «Понятие интеграла», «Дифференцирование функций» и «Применение производной» для 10 класса. Также был сохранен раздел «Комплексные числа», а аксиоматический метод в математике планировалось обсудить в завершающем разделе курса геометрии [193].

Однако появлялась характерная критика данной учебной программы в излишней теоретизации курса и ослаблении формально-оперативной стороны, что отрицательно влияет на развитие логического мышления и формирования математической культуры обучающихся. Кроме того, проект учебной программы критиковался за необоснованное распределение учебного времени на определенные темы, перегруженность и отсутствие учета возрастных особенностей учеников. Отмечалось, что авторы программы «разрывают темы, переставляют по разным годам обучения, не учитывая их взаимосвязей и возможностей восприятия детей разного возраста, не понимая возрастных особенностей учащихся» [105, с. 167].

Оппоненты данной учебной программы также были не согласны с введением элементов математического анализа, так как, по их мнению, «отсутствует практическая значимость данных сведений как в трудовой деятельности, так и в вузе» [105, с. 167].

Подчеркнем, что затем все эти критические положения станут традиционными по отношению к материалам реформы и будут воспроизводиться постоянно.

5. Пятый – целенаправленный период подготовки реформы общего математического образования охватывает первую половину 1960-х годов и характеризуется обновлением содержания общего математического образования.

Поставленные задачи реализации положений закона «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР» (декабрь 1959 года) способствовали началу процесса изменения системы общего математического образования.

В начале июля 1960 года в Москве состоялся Всероссийский съезд учителей, на котором плодотворно обсуждались новые стратегические задачи системы общего образования. После этого началась активная разработка и последующее обсуждение новых учебных программ по математике, методик и форм организации занятий по математике для восьмилетней и средней школы [47]. Хотя пересмотр учебных материалов после принятия соответствующего закона не стал предметом обсуждений в научно-педагогическом сообществе, происходили активные дебаты о направленности модернизации математического образования в целом. Первым практическим действием по модернизации общего математического образования стала программа по математике для начальной школы, созданная в 1960 году [167]. Затем проекты новых программ для восьмилетней и средней школы были разработаны сектором методики преподавания математики в Институте методов обучения Академии педагогических наук. В 1960 году в восьмилетних школах начали применять новые учебные программы по математике, а в 1963 году они были внедрены и в старших классах (программа рассмотрена в п. 1 главы 2).

С 1959 года началось формирование системы школ и классов с углубленным изучением отдельных предметов, которые возникали на базе средних общеобразовательных школ с производственным обучением и успешно зарекомендовали себя.

В школах и классах с углубленным изучением математики, представляющим собой один из видов профильного обучения, учебный план включал три ключевых дисциплины: алгебру, математический анализ и геометрию. Эти предметы, наряду с физикой, считались основными, в то время как остальные дисциплины преподавались по стандартным программам. Одним из прикладных являлся курс «Программирование и вычислительная математика», однако могли быть предложены и иные области, связанные с применением математических знаний.

Согласно программе, на теоретические занятия в специализированных классах отводилось 1120 часов, в то время как для практических упражнений на вычислительных машинах – 144 часа на каждый класс [114].

С 1963 года начали свою работу физико-математические школы-интернаты, которые были связаны с ведущими университетами страны. Эти учреждения ставили перед собой две основные задачи: во-первых, привлечь одарённых молодых людей в сферу науки, а во-вторых, разработать учебные материалы и методы для преподавания актуальных математических тем. [193].

Переход на восьмилетнее обучение по обновленной программе потребовал пересмотра существующих учебников и создания нового комплекса учебников по математике.

В частности, был обновлен учебник по алгебре А.Н. Барсукова, а также переработаны материалы по геометрии в учебнике Н.Н. Никитина и Г.Г. Масловой.

В 1962 году Министерство просвещения РСФСР объявило конкурс на разработку новых учебников по математике (председателем жюри был назначен академик АН УССР Б.В. Гнеденко), в котором мог участвовать каждый преподаватель. Всего на конкурс было представлено 86 рукописей учебников. Из них 22 – по арифметике, 21–по алгебре для восьмилетней школы, 17 – по алгебре и элементарным функциям для средней школы, 19 – по геометрии для восьмилетней школы и 7 – по геометрии для средней школы. В 1965 году итоги конкурса были подведены и опубликованы в журнале «Математика в школе» [53].

По арифметике было решено не присуждать первой премии, вторая премия присуждена Н.А. Принцеву и М.И. Ягодовскому; поощрительные премии – С.А. Пономареву, П.В. Стратилатову, Н.И. Сырневу, С.Ф. Моисееву. Жюри отклонила 19 рукописей как не соответствующих требованиям и имеющим серьезные логические ошибки.

Среди рукописей по алгебре для восьмилетней школы, по мнению жюри, не было таких, авторы которых заслуживали бы присуждения первой или второй премии. Но авторам двух рукописей жюри нашло возможным присудить поощрительные премии – Н.А. Принцеву, П.А. Ларичеву и М.Ф. Клюквину. Обе рукописи, признанные членами жюри, обладали рядом методических достоинств и, несомненно, при соответствующей необходимой доработке и последующем тщательном редактировании могли бы, по мнению жюри, принести пользу. Именно по этой причине жюри рекомендовало после доработки издать эти рукописи в качестве пробных учебников.

По геометрии для восьмилетней школы первой премии не было. Вторая премия была присуждена авторскому коллективу в составе: А.Ф. Семенович, Ф.Ф. Нагибин, Р.С. Черкасов. По мнению жюри, «книга написана живо, удачно подобраны упражнения, интересна методически» [53, с. 7]. Также при должной редактуре и доработке данная рукопись призвана стать пробным учебником. Кроме этого, были присуждены две поощрительные премии авторам К.С. Барыбину и Н.Я. Великину [149].

В результате конкурса были изданы учебные материалы по алгебре и элементарным функциям, созданные Е.С. Кочетковой. Тем не менее, не все учебники, победившие в конкурсе, были внедрены в школьную программу.

Параллельно проведению конкурса в соответствии с программой по математике 1960 года были разработаны новые экспериментальные учебники по математике, в которых модернизировалось и усложнялось содержание общего математического образования. Был создан учебник по арифметике для 5-го и 6-го классов А.К. Андронова и В.М. Брадиса, который новаторски базировался на концепции теории множеств [5].

Также были изданы алгебраические пособия для старших классов, созданные Р.С. Черкасовым, А.И. Маркушевичем и другими авторами, в которых была предпринята плодотворная попытка включить в школьную программу элементы высшей математики [132].

Кроме того, в 1963 году был издан учебник по геометрии В.Г. Болтянского и И.М. Яглома, основанный на принципах геометрических преобразований. В 1960 году проводился конкурс на разработку новых школьных учебников по математике, что указало на рост интереса к обновлению образовательных материалов в данной области [93].

В первой половине 1960-х годов существенно активизировались научные исследования в области методики преподавания математики. Важную роль в этом процессе сыграл сектор, а затем лаборатория обучения математике Института общего и политехнического образования АПН РСФСР. Немаловажный вклад в развитие методических подходов в области преподавания математики внесли сотрудники кафедры педагогики Московского государственного педагогического института имени В.И. Ленина, Московского областного педагогического института имени Н.К. Крупской, Ленинградского педагогического института имени А.И. Герцена, Киевского педагогического института имени А.М. Горького и Казанского педагогического института. Эти учебные заведения активно способствовали развитию новых методов и подходов в преподавании математики. К 1972 году было защищено около 450 кандидатских диссертаций на тему методики преподавания математики [73].

При анализе обновления содержания общего математического образования в первой половине 1960-х годов становится очевидно, что общее математическое образование и методы преподавания насущно нуждались в существенной модернизации. По данным историка математики И.П. Костенко, после 1956 года как «рубежного для отечественного математического образования началось снижение качества знаний школьников. За пять лет, к 1961 году качество знаний по математике упало примерно в 3,5 раза» [105, с. 181].

Охарактеризуем основные недостатки и противоречия, определяющие необходимость модернизации общего математического образования.

1. Содержание общего математического образования устаревало, становилось формальным и оторванным от реальной жизни. Несмотря на множество реформ, преподавание математики в общеобразовательных школах оставалось в значительной степени неизменным, программа школьной математики не учитывала современных достижений науки и потребностей практики, его уровень снижался из-за отсутствия механизма своевременного обновления содержания общего математического образования [171].

Преемственность между уровнями образования была нарушена. Простое механическое увеличение объема и добавление новых тем приводили к снижению качества образования по математике в целом. Это затрагивало не только новые темы, но и традиционные. Ограниченные возможности исключения традиционных элементов из программы математики сдерживали значимые изменения.

Курса математики оставался архаичным, целый ряд понятий современной математики не был введен в содержание программ и учебников. Решение заключалось в том, чтобы рассматривать традиционный материал элементарной математики через призму современных идей и методов, отступая от классических подходов до XVII века. Попытки перестроить школьное математическое образование на базе ключевых идей математики терпели неудачи. Проблема заключалась в том, что новые концепции и содержание лишь дополняли существующие без глубокого преобразования [145].

2. Наиболее существенным проявлением отрыва содержания общего математического образования от практики являлось недостаточное раскрытие сфер и приложения изучаемого материала, когда учащиеся, приобретая определенные математические знания, не приобретали умения применять их. При изучении некоторых тем, богатых разнообразными практическими приложениями, основное внимание уделялось не содержательной, а формальной стороне рассматриваемых вопросов. Так, например, при изучении прогрессий нередко основные усилия учащихся направлялись на выполнение искусственных упражнений в составлении и решении уравнений. А то, что прогрессии представляли собой один из наиболее часто встречающихся законов изменения величин, оставалось недостаточно выявленным. Как и то, что такие явления, как радиоактивный распад, прирост древесины в лесном массиве, изменение количества воздуха под колоколом воздушного насоса, происходят по закону геометрической прогрессии [199].

3. Существенное проявление отрыва обучения математике от практики заключалось в том, что в процессе преподавания часто игнорировались именно те методы решения задач, которые наиболее часто применялись на практике. Так, например, на уроках геометрии учащиеся все построения осуществляли только при помощи циркуля и линейки и не приучались уверенно обращаться с такими практически необходимыми инструментами, как чертежный треугольник или

транспортир. При решении задач на определение элементов треугольника учащихся часто не знакомили с практически употребительным приемом решения таких задач, заключающимся в том, что данный треугольник строят в некотором масштабе и затем искомые элементы определяют путем измерения. Как отмечал известный математик В.И. Левин, «если архаичность некоторых материалов программы по математике постепенно устраняется в качестве уступки новым веяниям, то несовершенство методов преподавания математики по-прежнему актуально и сильно тормозит ее реорганизацию» [116, с. 145].

4. Недостаточно осуществлялись межпредметные связи математики с другими дисциплинами, такими как физика, химия, география, черчение, не привлекались иллюстрации из этих дисциплин, так же как из окружающей действительности. Кроме того, учитель математики не знал, с какими математическими вопросами встречаются его ученики на производстве, и не мог их учитывать в преподавании, с тем чтобы обучение математике помогало учащимся в их работе на предприятиях [113].

5. Потребности будущих специалистов в математических знаниях и методах учитывались недостаточно. Для преодоления этих недостатков учителям математики было рекомендовано максимально активизировать процесс обучения для достижения наибольшей эффективности усвоения учениками материала путем умелой постановки вопроса, проблемы, мобилизации сил и способностей учащихся для ее решения; сделать так, чтобы изучаемый математический факт служил ответом на какой-то вопрос, доступный пониманию учащихся. Кроме того, преподавателям математики рекомендовалось использовать различные практические работы, в частности, при изучении курса геометрии [105].

Охарактеризованные недостатки и противоречия составили проблемное поле реформы общего математического образования во второй половине 1960-х годов.

1.3 Реформа школьного математического образования 1965–1978-х годов: содержание, итоги, последствия

1.3.1 Реставрация структуры общего образования

После отставки Н.С. Хрущева в октябре 1964 года начался постепенный демонтаж реформы образования, осуществляемой в соответствии с законом «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР». 10 августа 1964 года ЦК КПСС и Совет Министров СССР приняли постановление «Об изменении срока обучения в средних общеобразовательных трудовых политехнических школах с производственным обучением», по которому сокращался срок обучения до 10 лет [146, с. 218].

Было прекращено производственное обучение школьников на предприятиях. Были скорректированы учебные планы и программы, такие предметы как электротехника и радиотехника оказались выведены из учебного плана. Политехнические установки были сведены к символичным декларациям.

10 ноября 1966 года было опубликовано постановление ЦК КПСС и Совета министров «О мерах дальнейшего улучшения работы средней общеобразовательной школы» [146, с. 216]. В данном стратегическом документе отмечалось, что уровень учебной и воспитательной деятельности в общеобразовательных школах по-прежнему не соответствовал возросшим требованиям современности. Существовали расхождения между учебными планами и актуальным уровнем знаний, избыточная нагрузка на учеников в виде обязательных занятий негативно сказывалась на качестве усвоения материала. В данной связи основными задачами определялось обеспечение учащихся крепкими знаниями в различных науках, формирование у них высокой сознательности и подготовка молодежи к сознательному выбору профессии и к жизни в обществе [78].

Существенно, что постановление предусматривало введение к 1970 году в общеобразовательных заведениях новых программ, учебных планов и школьных учебников, которые бы отвечали современным требованиям основ науки, техники и культуры [146].

В 1967 году Совет Министров СССР издал постановление «О мерах по улучшению подготовки и издания школьных учебников и обеспечения ими учащихся», согласно которому Академия педагогических наук РСФСР совместно с Министерством просвещения СССР должны были разработать новые требования к учебным пособиям в соответствии с задачами, ставящимися перед школьным образованием, а также организовать разработку новых «стабильных» школьных учебников [146 с. 224].

В 1968 году были утверждены новые требования, предъявляемые к школьным учебникам, а также началась разработка новых учебников в соответствии с требованиями, сформированными в «Типовом положении о конкурсах на создание учебников для общеобразовательных школ СССР» [190, с. 292].

Одним из главных требований являлся высокий теоретический уровень изложения учебного материала. Также в данном положении были установлены объемы материала, входящие в учебники, значимым запросом являлась простота изложения учебного материала. соблюдая Главный принцип реформирования состоял в том, чтобы достигался высокий уровень научности, но в пределах школьной программы.

Для отбора учебных пособий рекомендовалось привлекать опытных учителей и ученых, которые бы рецензировали их пробные прототипы. Для еще большей активизации научно-педагогических коллективов 11 августа 1969 года были утверждены четыре государственные премии СССР за разработку новых учебников для средних общеобразовательных, средних специальных и высших учреждений. Данное положение должно было увеличить количество экспериментальных учебников, а также улучшить не только их количество, но и их качество.

Указом Совета Министров СССР от 20 июня 1972 года «О завершении перехода к всеобщему среднему образованию молодежи и дальнейшем развитии общеобразовательной школы» [146, с. 236] была поставлена задача введения всеобщего обязательного среднего образования. В соответствии с правительственным постановлением, необходимость создания нового корпуса новых учебников по математике стала срочной задачей.

К 1975 году должно было завершиться внедрение новых учебных планов и программ по всем предметам, подготовка стабильных учебников и учебно-методических материалов, обновление материально-технической базы образовательных учреждений [59].

Хотя в то время партийно-правительственные решения не подлежали обсуждению, приведем мнение И.П. Костенко, не согласившегося с требованием реформирования математического образования, которое основывалось на необходимости привести школьный курс в «соответствие с современными требованиями», которые предъявляются жизнью. По мнению ученого, «этот парадокс объясняется спецификой профессионального математического мышления – абстрактно-формализованного, аксиоматически организованного, строго логичного. Когда это специфическое мышление прикасается к проблемам жизни, всю сложную противоречивость которых не может охватить, оно порождает обессмысленную схоластику» [105, с. 220].

1.3.2 Начало осуществления реформы школьного математического образования

В 1964 году в журнале «Математика в школе» А.И. Маркушевич в статье «К вопросу о реформе школьного курса математики» рассматривал «бурбакинский» подход изложения математики и перспективы его введения в школьный курс. Ученый отмечал, что необходимо «составление школьного курса, рассчитанного на несколько лет изучения, в котором в определенной системе будут охарактеризованы, обильно иллюстрированы и пояснены примерами основные математические понятия: множества, отношения». По его мнению, алгебраические операции не вызовут принципиальных трудностей: «…последовательные ступени этого курса и весь курс в целом окажутся вполне посильными учащимся и будут поддерживать в них интерес к предмету, а многие темы будут восприниматься детьми как занимательные игры» [129, с. 5].

В июне 1964 года Министерство просвещения РСФСР провело содержательное совещание, посвященное вопросам математического образования в средней школе. По предложению А.Н. Колмогорова было решено не включать в общие учебные программы элементы теории вероятностей и математической статистики.

В 1965 году создается комиссия по определению содержания школьного образования под руководством А.Н. Колмогорова и А И. Маркушевича. Целью комиссии стало определение нового содержания среднего математического образования [105].

Одними из первых, кто стал поддерживать идею о модернизации математики на данных основаниях, были академики АН СССР и АПН РСФСР Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) и академик АПН РСФСР А.И. Маркушевич (1908–1979).

Андрей Николаевич Колмогоров – выдающийся советский математик, внесший значительный вклад в изучение теории вероятностей, математической статистики и других областях. Его работы стали основой для многих современных направлений в математике и прикладных науках. Обучаясь в Московском государственном университете, он серьезно занимался древнерусской историей и позже публиковал работы по лингвистике и стиховедению [113].

Андрей Николаевич – ученик и последователь выдающегося ученого-математика, академика АН СССР Николая Николаевича Лузина (1883–1950), который получил международную известность исследованием тригонометрических рядов и интегралов, а также созданием дескриптивной теории множеств и функций действительного и переменного, теории изгибания поверхностей, матричной теории дифференциальных уравнений, непосредственно связанных с теорией автоматического управления.

Существенно, что ученый был видным педагогом, создателем и руководителем в 1920–1930-е годы московской математической школы, получившей в истории науки название «Лузитания». Это была школа развития самостоятельного мышления, способности ставить новые научные проблемы. Кроме А.Н. Колмогорова, в этой научной школы сформировались такие видные математики, как П.С. Александров, М.А. Лаврентьев, А.А. Ляпунов, А.Я. Хинчин, внесшие определенный вклад в реформирование содержания общего математического образования. Всего в базе данных «Математическая генеалогия» Н.Н. Лузин имеет более 5000 научных «потомков» [93].

В 1930-е годы А.Н. Колмогоров стал ведущим ученым в советской математике, который объединял интерес к математике с гуманитарными науками. А.Н. Колмогоров получил международную известность своей формулировкой аксиоматической теории вероятностей в 1933 году, которая привела к систематическому подходу к анализу случайных событий. Введенные им аксиомы позволили формализовать понятие вероятности, сделав его более строгим и понятным. Это открытие способствовало развитию математической статистики и теории случайных процессов. Также ученый доказал теорему о больших числах.

Кроме того, А.Н. Колмогоров активно занимался вопросами топологии, функционального анализа и математической логики; предложил метод, основанный на понятии меры, который стал основой для таких направлений, как интегральное исчисление и теория информации. Его научное наследие носит непреходящий характер [149].

За выдающиеся научные достижения академик А.Н. Колмогоров был удостоен семи Орденов Ленина и ряда высоких государственных наград, стал лауреатом нескольких Государственных премий. В 1963 году ему было присвоено звание Героя социалистического труда.

А.Н. Колмогоров внес выдающийся вклад в подготовку нескольких поколений ученых-математиков. Ученый – основатель большой научной школы, среди его учеников видные математики: В.И. Арнольд, И.М. Гельфанд, Б.П. Демидович, В.М. Алексеев, Г.И. Баренблатт, А.А. Боровков, А.Г. Витушкин, Б.В. Гнеденко, Р.Л. Добрушин, Е.Б. Дынкин, А.И. Мальцев, М.Д. Миллионщиков, В.С. Михалевич, А.С. Монин, С.М. Никольский, А.М. Обухов, Ю.В. Прохоров, Я.Г. Синай, В.М. Тихомиров, Ю.Н. Тюрин, А.Н. Ширяев, В.А. Успенский, С.В. Фомин, А.М. Яглом и многие другие.

В 1935 году А.Н. Колмогоров был соорганизатором проведенной в МГУ Московской математической олимпиады школьников, заложившей основу для проведения последующих всесоюзных математических олимпиад. По его предложению и благодаря большой организационной деятельности в 1963 году при МГУ была создана физико-математическая школа-интернат, что стимулировало интерес к математике и физике среди одаренных детей. Летние школы, организованные Колмогоровым, стали площадками для выявления талантливой молодежи, где взаимодействие с опытными учеными способствовало формированию нового поколения исследователей [1].

Начиная с 1964 года, А.Н. Колмогоров выступал инициатором и лидером реформы общего математического образования, основной целью которой являлась модернизация школьного курса математики, а также повышение уровня научности содержания математического образования, создание современных образовательных программ и учебников по математике. В 1960–1970-е годы он подготовил линейку новых учебников по математике для средней школы [159].

Вклад А.Н. Колмогоров в реформу носил определяющий характер, и в истории образования эта реформа известна как «колмогоровская». Именно его непререкаемый авторитет и активное влияние на протяжении десяти лет (1968–1978) помогало ослабить негативное восприятие со стороны Академии наук СССР по отношению к концепциям реформы. В целом, несмотря на все сложности, идеи и подходы Колмогорова легли в основу дальнейшего развития математического и физического образования в СССР и за рубежом [104].

Алексей Иванович Маркушевич – видный математик и педагог, книговед, доктор физико-математических наук (1944), профессор (1946), действительный член (1950), вице-президент (1950–1958, 1964–1967) Академии педагогических наук РСФСР, действительный член (1967), вице-президент (1967–1975) Академии педагогических наук СССР; заместитель министра просвещения РСФСР (1958–1964).

Окончил физико-математическое отделение Среднеазиатского университета в Ташкенте. Осенью 1931 года поступил в аспирантуру Научно-исследовательского института механики и математики МГУ. Его научным руководителем стал видный математик Михаил Алексеевич Лаврентьев. С 1935 года преподавал в Московском государственном университете.

А.И. Маркушевич – автор значимых работ по теории функций комплексного переменного (теория конформного отображения, теория приближенных функций). Создал цикл работ по вопросам приближения, интерполяции и полноты, благодаря которым в теории аналитических функций стали широко использоваться методы функционального анализа, в частности теория линейных пространств [104].

Ученый также опубликовал труды по методике преподавания математики, истории науки. Им были созданы многочисленных научно-популярные работы по математике.

А.И. Маркушевич выступал инициатором, участвовал в издании серий книг «Библиотека учителя», «Популярные лекции по математике». В 1951–1952, 1963–1966 годах был в числе инициаторов и редакторов «Энциклопедии элементарной математики». Один из инициаторов (в 1965–1978 – главный редактор) создания «Детской энциклопедии» в 12 томах. Принимал участие в издании книги «Что такое? Кто такой?» в трех томах для младших школьников.

А.И. Маркушевич являлся убежденным сторонником и инициатором реформирования преподавания математики в школе в 1960-е – 1970-е годы. Эту реформу ученый начал готовить еще с конца 1940-х годов [95].

В 1960-е годы он принимал участие в создании новых школьных учебников по математике, разрабатывал теорию школьного учебника, работал над вопросами усовершенствования подготовки школьных учителей математики. Был председателем комиссии Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР, которая определяла содержание образования в средней школе. Именно А.И. Маркушевич привлек к участию в реформаторской деятельности А.Н. Колмогорова [213].

Кроме признанных официальных и неформальных лидеров, деятельными участниками реформы выступали видные математики и методисты В.Г. Болтянский, Ю.Н. Макарычев, Г.Г. Маслова, К.И. Нешков, А.Д. Семушкин, А.И. Фетисов, А.А. Шершевский, И.М. Яглом.

1.3.3 Цели и задачи реформы содержания общего математического образования

В период реформирования содержания школьного математического образования с 1965 по 1978 годы основной целью выступало поднятие российского математического образования на мировой уровень. Математика должна была стать ведущей и привлекательной сферой знаний и деятельности, выступать как осознанное и внутренне мотивированное стремление школьников. Радикальное изменение в системе математического образования в школах было нацелено на создание нового поколения, обладающего современными навыками мышления и культурными предпочтениями, что должно было помочь приблизить эру технократии.

Эту реформу можно рассматривать:

– как полное преобразование школьного математического образования на основе новых принципов;

– как создание особых учебных заведений с инновационным подходом к обучению математике.

В данной связи выделялись три главные задачи, касающиеся различных аспектов:

– общеобразовательного;

– прикладного;

– подготовки студентов к обучению в вузах.

Подчеркнем, что каждая из этих задач в какой-то мере противоречила другим, что создавало сложности в рациональной разработке учебных планов.

Одной из ключевых целей реформы было установление концептуальной согласованности курса математики в средней школе. В этом контексте предлагалось учитывать такие аспекты:

1. Направлять обучающихся, где это возможно, к современным и рациональным подходам решения задач прямым образом.

2. Переход к новым идеям должен происходить с ясной мотивацией, доступной учащимся.

3. Каждое направление учебной деятельности должно достигать минимально необходимых результатов, которые оправдывают его существование, так как весь изучаемый материал должен находить свое применение в будущем [113].

Стремление повысить научный уровень школьного преподавания математики в СССР было обусловлено социальными факторами, такими как тенденция к политехнизации образования и увеличение сроков среднего обучения [105]. Политехнический аспект курса математики должен проявляться, прежде всего, в выборе учебного материала, способе его подачи и содержании заданий; раскрываться через особенности того, как математика отражает реальный мир, а также через применение математических знаний к различным практическим ситуациям. Важным аспектом являлось формирование умений и навыков, нужных в повседневной жизни и производственной сфере, а также интеграция школьных методов решения задач с практическими подходами.

В ходе обучения математике должна осуществляться последовательная и целенаправленная работа, направленная на развитие у учащихся навыков самостоятельного креативного мышления, а также общего интеллектуального роста, включая развитие логического мышления и пространственных представлений [159].

Итак, изучение и преподавание математики, с одной стороны, было призвано готовить учеников к применению математических навыков в других дисциплинах, а с другой – формировать их интеллектуальную готовность и влиять на содержание и обучение в других предметах. Реформа содержания математического образования требовала пересмотра методов обучения, что в свою очередь предполагало обновление содержания. Акцент делался не только на преподавании современных математических понятий, но и на новаторских подходах к обучению в целом [167].

Задачи, стоящие перед развитием математического образования, включали:

– обновление содержания математических образовательных программ на всех уровнях с учетом потребностей учащихся и общества, ориентированных на достижения в науке и практике;

– обеспечение высокого качества учебных планов, внедрение современных технологий в учебный процесс и повышение квалификации учителей математики;

– создание необходимых условий для развития математической одаренности у способных учеников [4].

Таким образом, необходимо было модернизировать содержание образования в соответствии с требованиями науки, а также более рациональным путем сформировать учебный материал по всем годам обучения в школе, учитывая то, что начиная с 4-го класса, вводилось преподавание курса основ наук. Также необходимо было переработать учебные планы и учебники, отказавшись от ненужного углубления в материал и от наименее важных тем, чтобы предотвратить перегрузку учебного плана.

В русле предстоящих изменений видный математик Б.В. Гнеденко в статье «О перспективах математического образования» утверждал, что «содержание математического образования в СССР устарело и требует немедленного изменения». Ученый считал, что необходимо «внедрить в школьную программу элементы дифференциального и интегрального исчисления вплоть до правил нахождения площадей плоских фигур и объемов тел вращения, элементы теории вероятностей, элементы теории множеств, элементы математической логики, представление о принципах работы вычислительных цифровых автоматов и о программировании для них» [53, с. 4].

1.3.4 Периодизация реформирования содержания школьного математического образования

В процессе реформирования содержания общего математического образования выделяются периоды, каждый из которых связан с другими общими целями и задачами.

1. Первый – концептуально-программный – этап реформирования содержания школьного математического образования охватывает 1967–1969 годы.

Еще в середине 1960-х годов математики Ю.Н. Макарычев, К.И. Мешков, А.Д. Семушкин, входившие в сектор обучения математике Института общего и политехнического образования АПН РСФСР, проводили экспериментальную работу по определению содержания математического образования в 4–10 классах. Данный коллектив утверждал, что теоретико-множественный подход к изучению математики позволял уже в 6 классе приступить к достаточно глубокому изучению функции. Они полагали, что в современных курсах математики определение функции сводилось к понятию соответствия между множествами. Коллектив математиков считал, что отсутствие в школе внимания к формированию этого родового понятия объясняет затруднения, возникающие у учащихся при изучении функции [126, с. 59].

Методологическая и методическая база реформы была разработана достаточно тщательно. В процессе анализа было обнаружено свыше десяти диссертаций советских математиков, посвященных теоретическому обоснованию реформы. Так, например, научной и методической основой реформирования общего математического образования послужили диссертации, выполненные рядом ученых: В.М. Боцу «К вопросу о модернизации обучения математике в 5-6 классах»; В.Н. Шония «Идеи множества и вероятности в курсе математики средней школы» и Н.М. Рогановского «Аксиоматическое построение школьного курса стереометрии с использованием методов геометрических преобразований» [31; 184; 209].

Таким образом, к 1968 году преобразования затронули не только содержание курсов по математике, но также и их философские основы и организационную структуру [114].

А.Н Колмогоров и А.И. Маркушевич с 1967 года приступили к разработке принципиально новой школьной программы по математике. Была создана первая версия новой программы для средних учебных заведений по математике.

В целом уже в этой первоначальной версии программы предлагались радикальные изменения в содержании школьного обучения математике. В программу школьного обучения математике были внесены изменения. Предлагалось заменить традиционный курс арифметики для 5–6 классов на новый курс математики, который начинался с изучения основ теории множеств. При этом арифметическая часть учебного материала включала значительное количество элементов алгебры и геометрии для подготовки к дальнейшему изучению.

В курсе алгебры основной школы внедрили теорию множеств, соответствий и функций. В рамках курса планиметрии акцент сделали на геометрических преобразованиях, рассматривая геометрическую фигуру как совокупность точек. Также повысили точность при изучении геометрических величин и включили основы векторного анализа в программу обучения.

Курс алгебры и начал анализа в старших классах предлагалось излагать на языке Коши, рассматривая понятия предела производной, первообразной, определенного интеграла и даже дифференциального уравнения.

Курс стереометрии предусматривалось строить по возможности на векторной основе, а в заключении курса математики рассмотреть систему аксиоматического построения геометрии [105].

Для доработки проекта новой программы были привлечены специалисты в области методики преподавания. Среди них находились заведующий лабораторией по обучению математике Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии наук СССР Г.Г. Маслов, а также его коллеги Ю.Н. Макарычев, К.И. Нешкова, А.Д. Семушин и А.А. Шершевский, который также являлся учителем математики.

В результате были разработаны новые экспериментальные школьные математические программы, введены новые учебные пособия, которые были приняты педагогическим сообществом крайне неоднозначно [167].

В 1968 году были опубликованы окончательные учебные программы по математике для средней школы, подготовленные под руководством А.Н. Колмогорова математической секцией Комиссии по определению содержания среднего образования АН СССР и АПН СССР. Программы были официально утверждены Министерством просвещения РСФСР и одобрены Министерством просвещения СССР в качестве основы для работы над новыми учебниками [190].

Для оперативного ознакомления учительства с новыми программами тиражом 4000 экземпляров была выпущена брошюра с текстом программ по математике для средней школы, которая была распространена по всем крупным городам Советского Союза. На этой основе на данном этапе реализовывалась реформа в области математического образования в школах СССР [167] (программы рассмотрены в п. 1 главы 2).

В учебную программу советской школы с 1967/1968 учебного года была введена новая форма обучения – факультативные занятия. Факультативные занятия вводились с 7-го класса по 10-й по выбору учащихся с целью углубления знаний по естественным и гуманитарным наукам, а также развитию их разносторонних интересов. В 7-м классе выделялся 1 час в неделю на факультативное занятие; в 8-м – 2 часа; в 9 и 11-х классах – 4 часа [54].

Данное изменение должно было индивидуализировать обучение учащихся, так как они сами выбирали направленность факультативов. Запись на факультативные занятия была добровольной, при этом прохождение факультативных курсов записывалось в аттестат. Минимальный состав группы факультативных занятий – 15 человек.

Данная форма обучения была направлена на развития потенциала более способных обучающихся. Факультативные занятия были неким компромиссом между дифференциацией обучения в старших классах и унификацией советского образования: «факультативные курсы – форма, несомненно, более демократичная и проще реализуемая, нежели специализация классов, требующая, в частности, наличия большого числа квалифицированных учителей» [1, с. 174].

А.Н. Колмогоров принимал личное участие в составлении программ факультативных занятий по математике: программы всех факультативных курсов разрабатывались под его руководством, он являлся соавтором и редактором имеющихся программ» [1, с. 174].

Факультативные занятия по математике предлагались двух видов: «Дополнительные главы и вопросы математики» и «Избранные вопросы математики».

Факультатив «Дополнительные главы и вопросы математики» был предназначен для углубления материала основной программы по математике. На этих занятиях расширялся материал, изучающийся в основной программе математики [200].

Факультатив «Избранные вопросы математики» существовал не во всех школах, в силу неподготовленности педагогических кадров. На данных занятиях рассматривался расширенный курс математики, выходящий за пределы основной программы по математике (векторная математика, геометрия Лобачевского, теория вероятности и комбинаторика, программирование). Как правило, данные факультативные занятия существовали в старших классах и служили дополнительной подготовкой к поступлению в вуз [200].

Поскольку факультативные занятия хронологически начинались раньше внедрения реформы основного общего математического образования, то содержание данной формы обучения также требовало изменений, которые были вызваны «естественным процессом перехода на новые программы по математике» [199, с. 135].

Функции факультативных занятий преобразовывались с учетом «модернизации» школьной математической программы. Помимо углубления в предметной области, факультативные занятия должны были развивать общекультурный уровень обучающихся, формировать математический образ мышления, а также усиливать межпредметные связи.

Стоит отметить, что интерес к факультативным занятиям в середине 1970-х годов стремительно падал и не получал своего развития, об этом заявлял и сам А.Н. Колмогоров: «число реально действующих факультативов оказалось невелико уже в середине 70-х годов, когда второй цикл факультативных курсов «Избранные вопросы математики» получил воплощение в пособиях» [1, с. 175].

Таким образом, новая программа по математике для средней школы принципиально отличалась от всех ранее существовавших в нашей стране. Она включала множество совершенно новых вопросов для педагогов и предлагала нестандартные подходы к известным математическим концепциям, а также использовала новую терминологию и символику.

В целом, рассматривая период 1967–1969 годов, можно отметить, что в короткий срок произошло много значительных изменений, которые существенным образом повлияли на уже сформировавшуюся систему общего образования по математике. При этом данные изменения приносили как положительный, так и отрицательный эффект. Далеко не все решения, принятые в рассматриваемый период, были успешными, но в итоге все рассмотренные преобразования подготавливали средние общеобразовательные учреждения к еще большим изменениям в преподавании математики, которые начинались в 1970 году.

2. Второй – апробационно-внедренческий – этап реформирования содержания школьного математического образования охватывает 1970–1976 годы.

На протяжении всего периода с 1970 по 1976 годы каждый год происходили изменения в программе и учебных материалах по математике: они пересматривались, сокращались и редактировались. Многие темы курса становились необязательными или полностью исключались. Тем не менее, курс математики оставался сложным и не упрощался. Как отмечал Ю.М. Колягин: «Ситуация осложнялась тем, что сами авторы новых учебников, а также руководство Министерства просвещения СССР были непоследовательны в своих программных и методических идеях» [93, с. 225].

По сути, переход на новые методические основы не способствовал улучшению научного уровня преподавания математики, а, напротив, увеличил степень формализации школьного курса. В меньшей мере это касалось алгебры, так как ее не удалось сделать полностью теоретической. А вот курс геометрии оказался более подвержен формализации, так как строился на строгих логических принципах. Отмечался ненужный концентризм построения курса, т. е. своеобразный повтор содержания образования [193].

Все эти обстоятельства поставили даже самых опытных учителей в сложное положение. Программа была настолько инновационной, а учебные материалы – недостаточно качественными и сложными для восприятия, что даже квалифицированные преподаватели испытывали трудности в их освоении.

При этом факт того, что при начале обучения конкретным функциям, таким как линейная функция, учащиеся работали не с конечными дискретными множествами, а с бесконечными непрерывными, не вызвал никакого удивления. Некоторые преподаватели подчеркнули, что новое определение функции не находит применения в курсе алгебры, однако это было воспринято как незначительный недостаток.

Кроме того, существовало сильное расхождение в подходах к обучению математике и физике. На уроках математики ученики рассматривали функцию как соотношение, тогда как на физике они воспринимали ее как зависимую переменную, и это было не единственным случаем разногласий [143].

Таким образом, можно выделить краткий перечень причин, вызывающих недовольство содержанием математического образования, который наиболее часто выделялся педагогами, родителями и профессиональными группами:

– чрезмерная нагрузка;

– акцент на запоминании информации в ущерб осваиванию методов получения новых знаний;

– недостаточное внимание к воспитательной составляющей;

– низкий уровень знаний;

– многообразие предметов без межпредметных связей;

– недостатки в учебных планах, программах и учебниках;

– отсутствие четких стандартов, фиксирующих ожидаемые результаты образовательного процесса.

Отмечались также неподготовленность или даже отсутствие продуктивной методической работы с учителями математики в школах. Обсуждение программы в методических журналах, курсы переподготовки, учебно-методические комплексы, а также создание методической литературы не давало положительного результата. Подчеркивалось, что «школе сейчас еще мало дать только программу и учебник, надо дать методические указания по преподаванию математики, предоставив дополнительные материалы, разработанные комплекты мало помогли» [95, с. 26].

Академик АН СССР С.Л. Соболев указывал, что учебно-методическая работа была выполнена на неудовлетворительном уровне, так как далеко не все учителя получили учебно-методическую литературу: «десятки методических пособий выпускаются в таких мизерных тиражах, что одно приходится на 20–30 школ. Никоим образом не могут учителя познакомиться с этими пособиями, ибо их у них нет» [95, с. 26].

Ни педагогические университеты, ни учебные заведения, ни органы местного управления в сфере образования не оказались готовы к столь резкому изменению содержания и методов обучения математике. Для исправления данной ситуации в учебные планы педагогических университетов был введен новый модуль – «Научные основы курса математики». Его целью было продемонстрировать будущим преподавателям, как текущее состояние науки находит отражение в школьной математике, а также помочь им увидеть возможные изменения в курсе. Однако даже эти меры не принесли ожидаемых результатов [154].

Учебники, созданные для осуществления реформы, были изданы в огромных тиражах и распространялись в школы без предварительной проверки со стороны Отделения математики АН СССР. Отмечалось, что «школьные учебники в ряде случаев перегружены излишней информацией и второстепенными материалами, что мешает выработке у учащихся навыков самостоятельной творческой работы» [95, с. 38]. Особенно негативную реакцию учительства вызвал новый учебник по геометрии.

Вместе с тем, в отчетах Министерства просвещения СССР, напротив, отмечалась скрупулезная работа при создании учебников по математике: «Каждый учебник досматривался в трех-четырех вариантах со стороны разных групп авторского коллектива; затем в течение трех лет экспериментировался, через три года он вводился как учебное пособие» [95, с. 26].

Эта деятельность осуществлялась при непосредственном участии методистов Министерства просвещения СССР и Академии педагогических наук СССР. В данной связи возникал вопрос: «Как можно создать единый для всей страны учебник, одновременно решая три противоречащие друг другу задачи: повысить научность содержания школьного математического образования, сделать образование массовым и не допустить его дифференциации?» [1, с. 242].

А.М. Абрамов, который участвовал в разработке учебника по геометрии для 6–8 классов, по прошествии многих лет после реформы выделял следующие основные критические ошибки, допущенные при реформировании математического образования: «Во-первых, решение о фактическом упразднении курса арифметики; во-вторых, соединение учебника с задачником в одной книге» [1, с. 207].

В результате уже на первоначальном этапе реформы в научных и педагогических кругах возникал вопрос о ее целесообразности.

Программа по математике 1968 года и оценка состояния преподавания математики в общеобразовательных школах вызвала принципиальную дискуссию. Отношение к реформе содержания общего математического образования 1970-х годов в научно-педагогическом сообществе было крайне противоречивым. И.П. Костенко метафорично выделяет три сформировавшиеся группы, на которые разделилось сообщество ученых и педагогов: «принципиальные критики реформы, принципиальные защитники и принципиальные «середняки» [105, с. 250].

Ученик А.Н. Колмогорова В.И. Арнольд принципиально критиковал теоретико-множественный подход Бурбаки, а когда учитель предложил ему участвовать в реформировании и модернизировании учебников, ученый категорически отказался [8].

С.К. Годунов дал негативную оценку уровню математической подготовки учеников: «Сейчас в самом деле уровень преподавания в средних школах, особенно в сельских, очень низок» [95, с. 64].

Другой ученик А.Н. Колмогорова, видный деятель общественно-педагогического движения и убежденный защитник реформы А.М. Абрамов отмечал, что программа, составленная А.Н. Колмогоровым в 1968 году, является «программой-мечтой». При этом Александр Михайлович отмечал, что если данная программа является «ошибкой, то всеобщей ошибкой, отражающей дух того времени» [1, с. 205]. Тем не менее, по мнению А.М. Абрамова, А.Н. Колмогоров смог объединить различные идеи по модернизации математического образования и сформировать конкретные предложения по решению данной проблемы [1, с. 221]. Так, например, отмечались хорошие результаты сдачи вступительных испытаний в вузы: «Прием прошел нормально и показал лучшее качество ответов и более глубокие знания выпускников по математике» [95, с. 27].

Сторонник взвешенной оценки Ю.А. Неретин критиковал данную программу, но считал, что главным недостатком, помимо перегруженности программы, является курс геометрии, основанный на абстрактно-логическом уровне. Повышение научной строгости изложения понятий и при этом упрощение курса геометрии не позволяли ученикам понять новый материал [149]. Однако А.М. Абрамов, напротив, убежден, что А.Н. Колмогоров справился с данной задачей: «С уверенностью можно утверждать, что «задача изложить основы математики в форме, доступной пониманию подростка, была к середине 70-х годов решена» [1, с. 203].

Практика показала, что даже базовый курс математики оказался перегруженным. Учащихся 4-го класса уже знакомили с такими понятиями, как «множество», «элемент множества», «принадлежность» и «пустое множество», а также вводили термин «высказывание». В 5-м классе вводились начальные операции над множествами: пересечение и объединение, учеников знакомили с их символическим обозначением и понятием перемещения фигур (например, поворот, параллельный перенос, симметрия). Знакомство с десятичными дробями в 4-м классе предшествовало систематическому изучению обыкновенных дробей в 5-м классе [149].

В 7-м классе учащиеся осваивали векторы и гомотетии, причем последние определялось через умножение вектора на число. Понятие производной вводилось только в 9-м классе, а в 10-м классе проходили интегралы и решали некоторые дифференциальные уравнения. Интегральные вычисления затем применялись в геометрии для вывода формул объемов пространственных фигур. Замена классического курса геометрии на более теоретически сложный курс не оправдала ожиданий и была остановлена. В результате министр просвещения СССР издал указ об отмене устных экзаменов по геометрии для девятых классов.

Вместе с тем, более устойчивыми оказались подходы в области преподавания алгебры и математического анализа. После доработки обновленные учебные материалы по алгебре и математическому анализу долгое время использовались в образовательных учреждениях, а инициативы о внедрении теории вероятностей в школьную программу вернулись на повестку дня в начале XXI века. Стремление внедрить в программу элементы высшей математики оказалось неэффективным, поскольку учащиеся хуже усваивали как новые, так и старые знания, на изучение которых отводилось меньше времени.

3. Третий период – отката и прекращения реформы – охватывает 1977–1980-е годы.

Негативные последствия нововведений проявились, когда в 1977 году первые выпускники, обучавшиеся по новой программе, начали поступать в вузы. Преподаватели заметили снижение уровня математической подготовки. Выяснилось, что абитуриенты, даже таких престижных вузов, как МГУ, МВТУ и МФТИ, не способны решать квадратные уравнения, выполнять простые устные вычисления и часто знают математические термины, не понимая их истинного смысла [162; 178; 198]. Долгое время несостоятельность реформ воспринималась как временное явление, однако ситуация кардинально изменилась с публикацией результатов вступительных экзаменов в ведущие университеты страны. Этот момент четко обозначил необходимость срочной реализации контрреформы для улучшения текущего положения.

Значимо, что 22 декабря 1977 года вышло постановление Центрального комитета КПСС и Совета министров СССР «О дальнейшем совершенствовании обучения, воспитания учащихся общеобразовательных школ и подготовки их к труду», которое признавало, что учебная программа, в том числе по математике, является излишне перегруженной [190, с. 376].

Все это привело к тому, что в конце 1977 года внимание на проблему обратили ведущие ученые научного сообщества математиков, члены Отделения математики Академии наук СССР. До этого Отделение математики, поручив

А.Н. Колмогорову проведение реформы, не проявляло никакого интереса к процессу ее выполнения.

Десять академиков обратились в Центральный Комитет КПСС с открытым письмом. В этом документе они выразили свою обеспокоенность ситуацией в системе общего математического образования. Так, президиум АН СССР 10 мая 1978 года выпустил постановление, оценивающее результаты реформы: «Признать существующее положение со школьными программами и учебниками по математике неудовлетворительным как вследствие неприемлемости принципов, заложенных в основу программ, так и в силу недоброкачественности школьных учебников» [95, с. 90]. Также формировались дальнейшие действия по вопросам школьных учебников математики: «Ввиду создавшегося критического положения в качестве временной меры рекомендовать возможность использования некоторых старых учебников» [95, с. 90].

5 декабря 1978 года состоялось общее собрание отделения математики Академии наук СССР, на котором обсуждались реформаторская школьная программа и учебники по математике. Собрание было долгожданным для многих представителей научно-педагогического сообщества, так как вопросы, поднимаемые на данном собрании, затрагивали стратегические интересы. Отмечалось, что «проблема эта имеет общенародное значение и вызывает большую озабоченность в самых широких кругах нашего общества, руководящих представителей Министерства просвещения СССР, Министерства просвещения РСФСР и других руководящих деятелей советской средней школы» [95, с. 25].

Необходимость в изменении, а также в улучшении принятой учебной программы по математике признавали как противники реформы, так и сами ее участники: «Привлечение новых сил к работе над программами и учебниками следует приветствовать» [95, с. 151]. Определение дальнейшего направления развития математического образования вызвало острую дискуссию среди научно-педагогического сообщества.

На данном собрании выступали ключевые фигуры, повлиявшие на математическое образование СССР во второй половине XX века. Среди выступающих были А.Н. Колмогоров, Л.С. Понтрягин, А.Н. Тихонов, С.М. Никольский, Ю.М. Колягин и другие.

На основании стенограммы, опубликованной Ю.М. Колягиным, и анализа выступлений отдельных персоналий есть основания сделать выводы по занимаемым ими позициям к реформированию математического образования. Проанализировав различные мнения и суждения о реформировании математического образования 1970-х годов, можно выделить несколько основных научно-педагогических подходов.

Первый из подходов – ретроинновационный – критиковал действующую программу 1970-х годов с позиций классической математики. На собрании были конкретные предложения по созданию новой учебной программы по математике. Ю.М. Колягин совместно с В.Г. Веселовым представили такой проект. Главной задачей проекта учебной программы являлось одинаковое обеспечение общеобразовательного минимума по математике в школе, техникуме и других общеобразовательных учреждениях. По данному проекту необходимо было устранить теоретико-множественный подход в школьном курсе математики совместно с чрезмерной логической символикой, так как, по мнению сторонников подхода, данные элементы не несли общеобразовательной ценности. Дедуктивный метод изложения материала замещался конкретно-индуктивным, при этом допускалось его использование в небольшом объеме [167].

Планировалось значительное уменьшение объема обязательного учебного материала за счет удаления из курса элементов теории множеств и математической логики, а также вычислений, связанных с логарифмическими таблицами, производными показательной и логарифмической функций. По данной программе устранялось ненужное дублирование при изучении элементарных функций и геометрических преобразований. Вместо этого увеличивалось время на осознанное освоение и закрепление материала, а также вводились новые темы, такие как «Комплексные числа» и «Основы теории вероятностей».

В некоторых разделах курса произошли изменения в структуре и акцентах. Например, материал по тригонометрии объединили в один блок, а изучение основ векторной алгебры сосредоточили на её практическом применении при решении задач.

Чтобы приблизить курс математики к реальным задачам, планировалось уделить особое внимание разработке и применению вычислительных алгоритмов, приближенных вычислениях и оценке точности измерений. Часть тем имела практическое применение: например, изучение комбинаторики включало основные задачи по теории вероятностей, а комплексные числа рассматривались на примере расчётов в электрических цепях.

В курсе «Математика» вначале изучались обыкновенные дроби, а после – десятичные. В курсе «Алгебра» материал не основывался на функциональной линии, при этом в данном курсе присутствовали темы из программы 1970-х годов: «Неравенства»; «Степени с рациональным показателем»; «Десятичные логарифмы»; «Арифметическая и геометрическая прогрессия» и «Начальные сведения ЭВМ». Курс «Геометрия» также не основывался на геометрических отображениях, при этом содержал темы: «Центральная и осевая симметрия»; «Гомотетия»; «Вектор» и др. [104].

Таким образом, сторонники данного подхода стремились упростить действующую программу по математике с помощью устранения теоретико-множественного подхода. По своей сути, предлагаемая ретро-инновационная программа идейно и содержательно возвращалась к программе 1960-х годов, но с новыми темами, которые «модернизировали» эту программу. Данный подход разделяли: Ю.М. Колягин; Л.С. Понтрягин; А.В. Бицадзе; В.С. Владимиров; А.Д. Александров; Г.П. Веселов и др. [95].

Сторонники **второго подхода – частично-коррекционного** – отмечали, что реформа принесла положительные изменения и, напротив, предлагали сохранить теоретико-множественный подход, на котором основывалась учебная программа 1971 года. Но считали, что необходимо улучшить ключевые моменты. Главной задачей новой программы являлось единство терминологии в науке и школах, техникумах, вузах.

Отличием от действующей программы являлось сокращение лишнего и второстепенного учебного материала, но при сохранении новых тем, раскрываемых теоретико-множественным подходом, однако первые понятия вводились с 5-го класса. Кроме того, в данной учебной программе структура и последовательность изучения некоторых тем были изменены. Также в действующую программу добавлялся раздел с теорией вероятности.

Сторонники данного подхода поддерживали интеграцию в школьный курс математики понятий из теории множеств, не придавая серьезным изменениям действующую учебную программу. По их мнению, подобные корректировки делали изложение материала, а также его взаимосвязь с другими темами более логичными и рациональными. А.Н. Колмогоров комментировал данную программу вполне нейтрально: «Все отличия сводятся к тому, что действующие учебники приучают к множествам и их отображениям друг на друга значительно раньше и в первую очередь на материале конечных множеств» [95, с. 149].

Сторонниками данного подхода были Н.Н. Боголюбов, В.М. Коротов, С.М. Никольский, А.Н. Тихонов, Д.К. Фадеев.

Третий подход – компромиссно-модернизационный – был сформулирован А.Н. Колмогоровым. По данному подходу корректировка текущего учебного плана требовалась, но не в таких масштабах, которые предлагали оппоненты. По убеждению А.Н. Колмогорова, «разговоры о якобы катастрофическом положении с математикой в средней школе представляются необоснованными» [95, с. 151].

Сравнивая предыдущие подходы к реформированию математического образования, А.Н. Колмогоров критически отнесся к идее включения материала из теории вероятности, комбинаторики и комплексных чисел, предлагая оставить данные разделы факультативным занятиям. Критики учебной программы зачастую ставили в пример негативный опыт внедрения теоретико-множественного подхода в западных странах. А.Н. Колмогоров отмечал, что в советской программе общего математического образования отсутствует излишний «бурбакизм».

Кроме того, с мнениями о критическом качестве учебников ученый не был согласен, но при этом признавал, что далеко не все учебники подготовлены на должном научном и методическом уровне: «Действующие учебники тщательно методически проработаны, но скучны и формалистичны. Теоретико-множественная символика часто применяется неумело, что приводит к излишним осложнениям … Пособие по геометрии для VI–VIII классов к следующему учебному году выйдет существенно переработанным … пособие по алгебре и началам анализа для IX–X классов считаю вполне доброкачественным … Определенно неудачно пособие по геометрии для IX-X классов» [95, с. 150].

А.Н. Колмогоровым было выдвинуто перспективное предложение о дифференциации обучения математике, а именно о создании двух комплектов учебников: с кратким содержанием материала, отвечающим программе основного курса (базовым), а также с расширенным (профильным). В расширенной версии учебников давались углубленные трактовки понятий, рассматриваемых в основной версии, а также были добавлены дополнительные главы, расширяющие изучаемые понятия и содержащие большее количество заданий повышенного уровня сложности.

Академик АН СССР С.Л. Соболев положительно оценивал работу А.Н. Колмогорова, а также разработанную им учебную программу: «Моя точка зрения заключается в том, что новые изменения – это есть крупное достижение … Это все – огромная работа, проделанная Министерством, а также группой математиков во главе с А.Н. Колмогоровым. Безусловно, очень много осталось погрешностей. Это и неудивительно – во всяком новом деле они неизбежны» [95, с. 50].

Академик АН СССР, лауреат Нобелевской премии Л.В. Канторович в своем выступлении также дал положительную оценку работе авторского коллектива

А.Н. Колмогорова: «Это была очень большая и серьезная работа, и Отделению лестно, что оно в этой ответственной работе приняло участие в лице Андрея Николаевича Колмогорова» [95, с. 55].

К числу сторонников данного подхода принадлежали: Л.В. Канторович, А.Н. Колмогоров, Ю.В. Прохоров, В.А. Савченко, С.Л. Соболев.

Решение, которое приняло общее собрание Отделения математики АН СССР, гласило: «Признать существующее положение со школьными программами и учебниками по математике неудовлетворительным» [95, с. 90]. А.М. Абрамов, комментируя данное решение подчеркнул, что «решение собрания принесло большой вред математическому образованию» [1, с. 213].

Завершающем актом, констатирующим окончание реформы содержания общего математического образования, стала установочная статья академика АН СССР Л.С. Понтрягина «О математике и качестве ее преподавания» в главном политическом официозе – журнале «Коммунист». Хотя статья была опубликована в июльском номере журнала за 1980 год, написана она была еще в январе 1979 года по итогам общего собрания Отделения математики Академии наук СССР. Данная статья 16 месяцев находилась в редакции, что, конечно, тоже симптоматично [170].

В этой статье видный ученый-математик жестко, даже непримиримо критиковал сложившуюся ситуацию с реформой содержания общего математического образования. Основная критика пришлась на внедрение теоретико-множественного подхода, который «пронизывал» весь курс школьной математики. По убеждению академика «на определенном этапе развития математики абстрактная теоретико-множественная концепция стала популярной, затмевая более конкретные исследования» [170, с. 105].

Виновником неудачи школьной реформы Л. С. Понтрягин считал лично А.Н. Колмогорова: «Руководство рекомендовало для работы по модернизации содержания общего математического образования академика А.Н. Колмогорова, который играл в модернизации руководящую роль. Поэтому ответственность за трагические события в средней школе в значительной степени лежит на нем» [170, с. 102].

Л.С. Понтрягин четко обозначил негативные последствия «модернизации» школьного математического обучения в СССР, указав на существенные недостатки новых образовательных программ по математике. По его убеждению, «сложные программы, часто не имеющие адекватного объяснения, ставили перед школьниками задачи, которые невозможно решить, что негативно сказывалось на общем уровне образования. Следовательно, возникала настоятельная потребность в эффективных образовательных материалах для устранения накопившихся проблем» [169, с. 21].

Л.С. Понтрягин отмечал, что «внедрение намеренно сложных учебных планов зачастую осуществлялось через некачественные учебники, которые не отвечают требованиям. Такой подход создавал дополнительные трудности для учеников и в значительной степени мешал их успешному изучению математики. В связи с этим современные школьные учебники представляли собой шаг назад, так как они ослабляли сущность математического метода. В целом, по убеждению академика, учебники по математике «несостоятельны по своему существу, поскольку выхолащивают суть математического метода» [170, с. 103].

Ученый также подробно охарактеризовал текущее состояние школьного математического образования в нашей стране, начиная с 60-х годов XX века и до конца 1970-х годов. Л.С. Понтрягин отмечал низкое качество преподавания математики в школах: «За последние годы, однако, преподавание математики в средней школе в нашей стране резко ухудшилось. В результате этого ослаб интерес школьников к математике и к наукам, требующим знания математики. В дальнейшем это может привести к катастрофическому положению» [169, с. 84].

В ответ на все эти критические замечания в начале 1980-х годов начала свою работу Комиссия по математическому образованию при Институте математики Академии наук СССР, которой руководил академик Л.С. Понтрягин. Комиссия предложила исключить из использования в школе учебники геометрии для 6–8 классов и внести изменения в учебники под редакцией А.Н. Колмогорова и А.И. Маркушевича, упростив язык и отказавшись от сложной символики.

Все это активизировало научно-педагогическое сообщество в разработке новых путей по «модернизации» школьного математического образования. Так, Совет отделения математики механико-математического факультета МГУ выступил с инициативой по совершенствованию школьных учебников: «механико-математический факультет МГУ может в течение года провести дополнительную и углубленную работу по рецензированию имеющихся учебников и устранению в них погрешностей» [95, с. 87].

В 1981 году была внедрена новая математическая программа общего образования, созданная с участием специалистов Академии наук СССР. Прагматический подход в преподавании математики становился главенствующим: акцент делался на математические знания, которые пригодятся в будущем большинству учащихся, а не только тем, кто собирается поступать в технические университеты. В этом программном материале было определено новое содержание курсов по математике и установлены требования к подготовке учащихся на различных уровнях обучения. Структура программы не зависела от конкретных учебников и способствовала стабилизации преподавания математики в школе [171] (программа проанализирована в п. 2 главы 2).

Работой над новыми учебниками по математическому образованию руководил академик АН СССР А.Д. Александров, который сменил А.Н. Колмогорова на посту председателя комиссии Учебно-методического совета в 1980 году. В его коллективе работали профессор А.Л. Вернер и преподаватель В.И. Рыжик из Ленинграда [38].

В результате серьезной критики «сложные» учебники по геометрии под редакцией А.Н. Колмогорова и З.А. Скопца были исключены из школьной программы. Они были заменены более доступными учебниками геометрии академика АН СССР А.В. Погорелова, изданными в 1970-х годах, которые основывались на традиционной евклидовой геометрии. Подчеркивалось, что в сфере общего математического образования в России важную роль играет наличие учебников, основанных на систематическом курсе, который берет начало от работ

Евклида. В данной связи отмечалось, что важнейшим условием успешного изучения математики в школах стало следование традициям, установленным Евклидом. Попытки отказаться от подходов, введенных Евклидом, зачастую приводили затем к возвращению к его методологическим основам. Отклонение от этих принципов стало основным фактором, негативно сказавшимся на реформе.

С начала 1982/1983 учебного года была инициирована реализация курса геометрии по учебнику А.В. Погорелова, охватывающего темы элементарной геометрии (планиметрии и стереометрии), который сочетал научные и педагогические преимущества, был краток и понятен, обеспечивая высокий уровень геометрических знаний учащихся. Проблемы, возникавшие в процессе введения нового учебника, могли быть решены при правильном методическом подходе. Переход на учебник Погорелова на долгий срок решил вопрос с учебным материалом по геометрии для 6–10 классов.

Также проводилась работа по обновлению действующих учебников по алгебре, что способствовало оптимизации преподавания предмета. Однако комиссия отметила, что при реализации данных мер было допущено несколько серьезных ошибок, и переход к новому учебнику затянулся на пять лет, хотя возможным был более быстрый срок в три года [155].

В 1982/1983 учебном году, вместе с введением учебника Погорелова, началась масштабная экспериментальная проверка ряда пробных учебников, охватывающая сотни тысяч учеников в различных регионах РСФСР.

Академик АН СССР А.Н. Тихонов сформировал две группы для разработки учебников по алгебре (Ш.А. Алимов, В.А. Ильин, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин) и геометрии (Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Э.Г. Позняк). Впоследствии в группы авторов были включены и квалифицированные педагоги по математике, которые осуществляли экспериментальную оценку учебных материалов: Л.С. Киселев, Н.Е. Федорова и И.И. Юдина [46].

При непосредственном руководстве А.Н. Тихонова были разработаны учебники по алгебре, созданные Ш.А. Алимовым и другими авторами, а также учебные пособия по геометрии под редакцией Л.С. Атанасяна и его коллег. В учебниках А.Н. Тихонов уделял особое внимание гармонии научного подхода и доступности материалов, основываясь на своих педагогических принципах. Одним из его ключевых убеждений было то, что каждое новое математическое понятие должно быть немедленно применимо. В связи с этим он решил исключить из программы 7-го класса понятие равносильности уравнений, так как оно не было необходимо для изучения уравнений с единственным неизвестным.

А.Н. Тихонов подчеркивал, что важно начинать изучение каждой темы с простых задач, у которых есть только одно решение, прежде чем переходить к более сложным проблемам. Именно поэтому в ранних версиях учебников по алгебре уравнения вида $ax + by = c$ не рассматривалось отдельно, а вместо этого вниманию учащихся сразу предлагались системы из двух линейных уравнений.

Параллельно начали появляться новые учебники и по другим направлениям математики, что способствовало возвращению в образовательный процесс ранее утраченного содержания образования. Учебные пособия по математике, разработанные под руководством А.Н. Тихонова для начальной и средней школы в период 1987–1988 годов, стали лауреатами на Всесоюзном конкурсе, посвященном созданию новых школьных учебников по математике. Эти учебники оказались достаточно востребованными и продолжают использоваться в настоящее время [95].

Однако по результатам исследования И.П. Костенко, контрреформа содержания общего математического образования, предпринятая в 1980-х годах, не решила проблемы, возникшие в процессе реформы в 1970-х годах. Основываясь на результатах вступительных испытаний в вузы, И.П. Костенко сделал вывод, что уровень знаний по геометрии и тригонометрии не только не улучшился, а наоборот, ухудшился: «в течение первой пореформенной десятилетки качество математических знаний и умений выпускников школы к концу 1980-х годов, сравнительно с их началом, упало в среднем почти в два раза» [105, с. 274].

Математическое образование в 1980-е годы в СССР представляло собой сложный период переосмысления реформ предыдущих десятилетий. Полного возврата к дореформенным программам, ориентированным преимущественно на вычислительные навыки, не случилось. Однако, масштабные изменения, предпринятые в 70-х, не прижились полностью, и программы обучения в школах и вузах прошли процесс корректировки. Новые учебники, хотя и отражали стремление к более современному подходу, всё же включали значительный объем традиционного материала. Это проявлялось, в частности, в сохранении значительного места элементарной алгебры и геометрии, хотя и с некоторыми нововведениями. Осознание важности основ теории множеств и анализа бесконечно малых для студентов технических вузов оставалось актуальным, и вопрос о включении этих аспектов в школьную программу поднимался вновь и вновь.

Произведенные реформы в математическом образовании не были безрезультативными, хотя определить оптимальное содержание школьной математики по-прежнему сложно. По свидетельству специалистов, «несмотря на внешнюю жесткость критики, все то, что составляло существо реформы Колмогорова, было сохранено и существует до сих пор» [1, с. 242].

Уровень подготовки советских школьников по математике долгое время оставался одним из самых высоких в мире, что подтверждали результаты международных олимпиад.

Таким образом, реформа в сфере общего математического образования, которая неразрывно связана с именем академика АН СССР А.Н. Колмогорова, смогла модернизировать содержание и структуру школьного математического образования, придать положительную динамику в развитие математического образования в целом.

Вместе с тем, реформирования требовало не только основное математическое образование, но также были необходимы изменения в подготовке учителей математики в педагогических институтах. Как подчеркивает А.М. Абрамов, главная причина неудачи реформы – «это отсутствие серьезных мер как по повышению статуса учителя, так и по изменению системы подготовки учителей» [1, с. 209].

Реализация реформы общего математического образования, безусловно, требовала больших изменений, которые выходили далеко за границы школьного образования. Основным недостатком советской школы было существенное несоответствие содержания и структуры образовательного процесса требованиям реальной жизни. Такое положение дел привело к слабой подготовке выпускников к реальным условиям жизни и затрудняло применение полученных знаний в творческой практике.

Это было связано с укоренившимся за десятилетия универсальным подходом к системе образования, когда все школы работали по единым программам и отсутствовали возможности для учета индивидуальных особенностей и образовательных потребностей учащихся [167].

По мнению Ю.М. Колягина, «провал реформы в условиях единой общеобразовательной школы был обусловлен многими причинами, в частности отсутствием дифференциации в обучении и вариативных программах, несовершенством новых учебников, консерватизмом и известной неподготовленностью преподавательского состава, недостаточным методическим обеспечением» [72, с. 100].

Если бы реформа общего математического образования осуществлялась не в массовых школах, а в специализированных учебных заведениях (например, в интернатах для талантливых детей или в классах с углубленным изучением математики), то результаты могли бы быть значительно лучше. На практике идеи реформы позже нашли успешное применение в учебных материалах для специализированных математических классов и школ.

1.4 Воздействие реформы содержания общего математического образования на динамику качества преподавания математики в образовательных учреждениях

1.4.1 Влияние реформы содержания общего математического образования 1970-х годов на уровень математического образования школьников

Подчеркнем, что реформа содержания общего математического образования 1970-х годов была одобрена Министерством просвещения СССР в 1968 году, а работа по новой программе 4-го класса должна была начаться уже в 1970 году. Согласно решению Министерства просвещения СССР, новая программа по математике должна была, начиная с 1970/1971 учебного года, реализовываться по всей стране.

Начало осуществления реформы содержания общего математического образования в общеобразовательных учебных заведениях происходило с 4-го класса в период 1970/1971 учебного года. Внедрение предусматривалось осуществлять планомерно: в 1971/1972 учебном году – 5-е классы; в 1972/1973 учебном году – 6-е классы; в 1973/1974 учебном году – 7-е и 9-е классы; 1974/1975 учебном году – 8-е и 10-е классы [93].

Постепенный переход математического образования на качественно новый уровень существенно повлиял на процесс преподавания математики в общеобразовательных учреждениях страны. Реформа содержания общего математического образования 1970-х годов, направленная на то, чтобы значительно повысить теоретический уровень подготовки школьников в области математических дисциплин, радикально изменила структуру и содержание математического образования.

Очевидно, столь значительные изменения в школьном курсе математического образования не могли не вызвать затруднения, не только со стороны учеников, но также и со стороны педагогического состава. Необходимо было в сжатые сроки выполнить значительную учебно-методическую работу: «Модернизация курса математики здесь уже находится в руках преподавателя-специалиста» [128, с. 85]. Как отмечает Ю.М Колягин, «ни учительство, ни институты усовершенствования учителей, ни пединституты, ни органы образования на местах не были готовы к столь резкому изменению» [95, с. 10].

В сентябре 1972 года проблема перехода школ на новые программы стала более острой, поскольку, как отмечалось, «школьники новых учебников не понимают» [148, с. 9]. По выражению Ю.М. Колягина (в то время он еще был активным участником реформы), «переподготовка учителей проходила по цепочке по принципу “испорченного телефона”, что подчеркивает методическую неподготовленность учителя к работе по новым программам» [95, с. 12].

Математическая программа оказалась настолько инновационной, а учебные пособия столь сложными и неудовлетворительными, что учителю было необходимо вначале детально объяснять материал учебника, прежде чем переходить к методам преподавания определенных тем.

В данной связи отметим, что основная критика реформы содержания общего математического образования в рассматриваемый период была направлена не столько на сам теоретико-множественный подход, а на реализацию его в школьных учебниках. В 1972 году 6-й класс перешел на изучение геометрии по новой программе и по новому учебнику. Итог перехода: «отмена годовой оценки по геометрии в шестых классах (в первый год)» [95, с. 13].

К недостатку новых учебников также можно отнести малое количество практических задач. Н.А. Курдюмова отмечает, что в данный период учителя сталкивались со значительными трудностями на уроках: «Я помню, как стояла перед расшалившимся классом, тщетно ища в учебнике подходящее упражнение. Мне бы подошло такое задание, которое заставило моих учеников что-то писать, чтобы они делом занялись и утихомирились. Но среди заданий я прочла следующее: “Возьмите листок бумаги, капните на него чернилами, потом сложите листок вдвое, а затем разверните. Объясните, что получилось”» [114, с. 38]. С теоретической точки зрения данное задание действительно могло быть интересным, но с точки зрения учителя, работающего с реальным среднестатистическим классом, оказалось непригодным.

Безусловно, по одному отрывку задания из учебника нельзя судить о качестве его составления, об уровне и количестве заданий. Но ситуация на уроке, представленная выше, отражает проблемы, с которыми сталкивались учителя, выявляет их сложности на уроках и их уровень подготовленности к работе по новой программе.

В результате программа, разработанная под руководством А.Н. Колмогорова, оказалась не по силам как ученикам, так и педагогам. Выпускники педагогических вузов, а также опытные учителя не могли адекватно разъяснить материал новых учебников, что затрудняло понимание темы учениками.

В целом апробация учебно-методических материалов показала то, что школьники и учителя не готовы были обучаться и обучать по новой программе, а также работать по новым учебникам. По данным Ю.М. Колягина и Н.А. Курдюмовой, в данный период много опытных учителей не выдерживали модернизации школьного курса математики и радикального изменения процесса обучения в школе: «двойного давления: реформирования содержания образования и обязательной десятилетки» [114, с. 33].

В процессе осуществления этих инноваций возникло массовое недовольство со стороны учителей математики, сталкивающихся с новыми методиками, требующими значительных изменений в подходе к преподаванию. Сокращение курса арифметики порождало недовольство учителей из-за недостаточных вычислительных умений учеников и студентов.

Многие учителя не были готовы к кардинальным трансформациям, что вело к снижению качества образования. Преподаватели столкнулись с большими трудностями при освоении новой программы. Педагоги со стажем покидали школы: «ситуация вынудила многих опытных учителей математики досрочно уйти на пенсию (по выслуге лет), что еще больше усугубило возникшие серьезные трудности в реализации идей реформы» [93, с. 227].

Требовалась существенная перестройка деятельности педагогических заведений, которые выпускали бы учителей, готовых работать по новой программе.

Ю.М. Колягин, на примере обучения студентов методике преподавания математике в МОПИ им. Крупской, отмечал, что в данном учебном заведении была «начата перестройка» обучения методике преподавания математике «с основными идеями реформы школьного математического образования» [92, с. 53]. Это означало, что ко времени написания данной статьи (1971 год) еще не произошел первый выпуск молодых педагогов, которых обучили новой методике преподавания.

Одной из основных причин неудачи реформы содержания общего математического образования 1970-х годов являлось несвоевременное начало подготовки учителей математики для работы по новой программе. Своевременное обучение учителей математики, освоенная ими методика преподавания многих сложных понятий из теории множеств, могли бы нивелировать те трудности в понимании учебного материала, с которыми столкнулись все школьники и их родители.

В связи с изменениями необходимо было провести масштабную переподготовку действующих преподавателей математики, а также ввести обязательные курсы для повышения их квалификации. Для поддержки учителей в начале реализации реформы были предложены учебные материалы, разработанные такими авторами, как Н.Я. Виленкин, К.И. Пешков, С.И. Шварцбурд, А.Д. Семушкин и А.С. Чесноков, под редакцией А.И. Маркушевича. В 1972 году были созданы примерные программы для самообразования учителей математики.

Предполагалось, что обучение учителей математики будет осуществляться по программам двух ступеней. Повышение квалификации для всех преподавателей 4–10-х классов начиналось с освоения программ первого уровня. Это касалось как новых учителей, только что завершивших учёбу в вузах, так и тех, кто имеет опыт работы. Обучение охватывало как тех, кто в текущем учебном году вёл занятия по новым методикам, так и преподавателей, не имеющих таких классов в своём расписании. Программы второго уровня были разработаны для учителей 9–10-х классов [174].

Программа самообразования охватывала темы из математики, включая теорию множеств, математическую логику и анализ, векторы, основы программирования, а также геометрические преобразования. Кроме того, в нее вошли аспекты методики преподавания в соответствии с новыми учебными планами, организацию факультативных занятий и внеклассные мероприятия. Данная инициатива была спроектирована на два года и предполагала общую загрузку в 200 часов, из которых 120 часов были отведены на изучение математических дисциплин, а 80 часов – на вопросы методики преподавания.

Организацию самообразования учителей математики осуществляли *методические объединения* под контролем администрации школы. В начале нового учебного года каждый преподаватель математики разрабатывал свой план самообразования на предстоящий год, основываясь на актуальных в этом году учебных программах. Процесс изучения материала по всем уровням проходил в течение двух лет. При планировании своего учебного расписания учитель математики должен был учитывать необходимость посвящения как минимум двух часов в неделю для изучения данного курса. Следует отметить, что все педагоги начинали своё самообразование с первого уровня, после чего могли перейти ко второму уровню [94].

Методическое объединение обязано было регулярно координировать и контролировать реализацию планов самоподготовки учителей математики. По завершении каждого раздела учебной программы, преподаватель математики должен был представить методическому объединению письменный отчет, составленный в соответствии с установленными стандартами. В течение каждого учебного года учитель обязан был подготовить один реферат, в котором на 5–6 страницах освещались наиболее значимые и ключевые аспекты изученного раздела программы. В течение двух лет обучения по программам самостоятельного изучения на каждом уровне педагог создавал одну методическую разработку для факультативного курса или одно методическое пособие для кружковых занятий. В представленных материалах раскрывались содержание и структура информации по теории разработанного курса, а также набор упражнений и методические рекомендации [174].

Следует отметить, что эта значимая и последовательная методическая деятельность была инициирована весьма поздно. Намеченные программы для самообразования педагогов математики были опубликованы только в 1972 году, в то время как реформа уже находилась в процессе реализации на протяжении трех лет. Соответственно, возникает вопрос: как учителя, не прошедшие курсы самообразования, все это время (1970–1974) обучали учеников 4 и 5-х классов, если они не освоили всю методику обучения? Кроме того, курс математики по продолжительности был рассчитан на два года, исходя из этого, учитель в полной мере мог овладеть методикой обучения математики по новой программе только к 1974 году.

В результате ученики 4 и 5-х классов обучались у педагогов, которые применяли, в лучшем случае, дидактические материалы, поскольку программы повышения квалификации для учителей математики еще не были разработаны. К 1974 году реформа содержания общего математического образования уже должна была включать 8-й класс. Важно также отметить, что преподаватель, работающий в старшей школе (9 и 10-й классы), обязан был пройти самостоятельное обучение по программе второго уровня, которая длилась два года. Таким образом, к 1976 году учитель математики мог завершить все курсы самообразования, и к тому времени ученики уже начинали свое обучение в 10-м классе.

В течение всего пропедевтического курса математики учащиеся могли бы существенно упростить процесс обучения, если бы преподаватели применяли отработанные методики изложения и усвоения новых понятий. Более того, выработанная педагогическая система «открытия» знаний и освоения нового материала могла бы ликвидировать «пробелы» у учеников, которые, безусловно, существовали у некоторых групп учащихся в период начала 1970-х годов. В результате трудности в изучении учебного материала по математике у школьников в младших классах накапливались с каждым годом, что в итоге отразилось на неудаче реализации всей реформы содержания общего математического образования в 1978 году [105].

Следует подчеркнуть, что в рамках реформы содержания общего образования по математике произошли изменения в выпускных экзаменах по этому предмету в школах. В 1975 году состоялся первый выпускной экзамен по математике для учащихся восьмого класса, который продемонстрировал высокую эффективность реализации реформы. Экзамен по алгебре проводился в письменной форме, тогда как геометрия сдавалась устно. Письменная часть экзамена включала пять заданий, соответствующих основным аспектам новой программы восьмилетней школы. На выполнение задач по алгебре отводилось три часа. Анализ экзаменационных работ по математике показал, что у школьников значительно улучшилась функциональная подготовка: «большинство из них хорошо строят и читают графики» [56, с. 37].

Кроме того, отмечалось, что ученики решают простейшие показательные и логарифмические уравнения на «твердом» уровне, а также владеют понятиями арифметической и геометрической прогрессий. Но при этом, как отмечалось экзаменационными комиссиями, на вступительных экзаменах по математике был зафиксирован ряд трудностей, с которыми сталкивались ученики.

Устный экзамен по геометрии проходил по билетам, в каждом из которых содержались три вопроса: два теоретических вопроса и решение задачи. При анализе результатов устного экзамена по математике 1975 года был сделан вывод: «99,6 % учеников восьмых классов выдержали экзамен по геометрии» [39, с. 35]. Вместе с тем, следует отметить, что во всех высших учебных учреждениях экзаменационными комиссиями отмечалось низкое владение учащимися теоремами и их слабое использование при решении геометрических задач, поскольку геометрия выпускниками как восьмых, так и десятых классов усваивалась намного хуже, чем алгебра.

По суждению Н.А. Курдюмовой, требования, предъявляемые к выпускным экзаменам, были излишне формализированы. Вследствие чего происходило завышение оценки за выпускной экзамен. Как свидетельствовала одна учительница математики: «после письменного экзамена я собственноручно исправляла ошибку в работе своей лучшей ученицы, чтобы она получила за экзаменационную работу 5 баллов, а не 4 балла» [114, с. 34]. К сожалению, подобная «подмена» результатов встречалась не в единичном случае. Как отмечалось педагогом: «мои коллеги десятками исправляют в экзаменационных письменных работах своих учеников ошибки» [114, с. 34].

1.4.2 Влияние реформы содержания общего математического образования 1970-х годов на результаты вступительных экзаменов в педагогических вузах

Стратегической целью реформы содержания общего математического образования 1970-х годов являлось повышение теоретического уровня изложения материала для подъема качества подготовки абитуриентов к поступлению в высшие учебные заведения. Однако главным показателем неудачи реформы содержания общего математического образования 1970-х годов являлись именно крайне неудовлетворительные результаты вступительных испытаний в вузы, которые показывали выпускники школ, окончившие школу уже по новой программе: «Все встало на свои места при первом выпуске из средней школы «отреформированной» молодежи, поступающей даже не в обычные, а в престижные вузы» [93, с. 229].

Вместе с тем, следует отметить, что в публикациях того времени достоверных данных о результатах вступительных экзаменов, отражающих состояние и качество знаний абитуриентов, чрезвычайно мало. Более того, отмечалось, что «данных для того, чтобы оценить степень падения качества знаний в 1978 году, нет совершенно» [105, с. 248].

Можно опираться на те результаты, о которых сообщалось в журнале «Математика в школе». Наиболее полные данные, которые можно сопоставлять и анализировать в периоды: «до реформы содержания общего математического образования» – «после реформы содержания общего математического образования», представлены в результатах прохождения абитуриентами вступительных испытаний в Московском государственном педагогическом институте имени В.И. Ленина. Стоит отметить, что МГПИ не являлся техническим университетом, но представленные данные позволят сделать субъективные выводы, отражающие общие тенденции, происходящие во многих университетах страны.

Период с 1968 по 1976 годы можно отнести к периоду «реформы», период с 1978 по 1987 год можно отнести к периоду «после реформы», поскольку в 1978 году Общее собрание ОМ АНН СССР вынесло решение о неудовлетворительном уровне действующей на тот момент программы [95, с. 90].

Проанализируем данные о вступительных экзаменах на математический факультет очного отделения МГПИ им. В.И. Ленина в разные годы поступления, в рамках изучаемого периода (таблица 1).

Таблица 1 – Результаты вступительных экзаменов по математике в МГПИ*

Год	Результаты экзаменов					
	Вид экзамена	Кол-во работ	«5»	«4»	«3»	«2»
1968	Письменный	473	53	95	167	158
	Устный	315	81	104	97	33
1969	Письменный	475	17	47	187	224
	Устный	249	62	97	64	26
1970	Письменный	508	353			155
1976	Письменный	307	23	81	138	65
	Устный	239	58	85	80	15
1977	Письменный	276	19	97	116	44
1978	Письменный	343	44	130	125	44
	Устный	299	76	113	102	8
1979	Письменный	334	90	104	123	17
	Устный	317	110	126	78	10
1980	Письменный	328	30	128	137	34
	Устный	294	125	101	56	12
1981	Письменный	301	52	93	128	28
	Устный	265	91	100	71	3
1982	Письменный	315	42	141	108	24
	Устный	291	140	85	66	0
1983	Письменный	276	38	75	144	19
	Устный	254	81	83	84	6
1986	Письменный	648	91	110	246	200

	Устный	416	133	187	79	17
1987	Письменный	542	49	173	211	108
	Устный	434	104	130	135	65

**Источники*: [37; 61; 63; 64; 66; 67; 74; 103; 106; 110; 179; 180; 193].

Особенно показательны результаты 1978 года в силу того, что в данное время произошел первый выпуск учеников, обучающихся по новой программе математики. По этим данным можно судить о результативности реформы содержания общего математического образования 1970-х годов.

Чтобы оценить динамику обученности абитуриентов, выделим процент сдававших письменный экзамен по математике выше «2» баллов. Составим диаграмму, отражающую статистические данные рассматриваемого периода (рисунок 1).

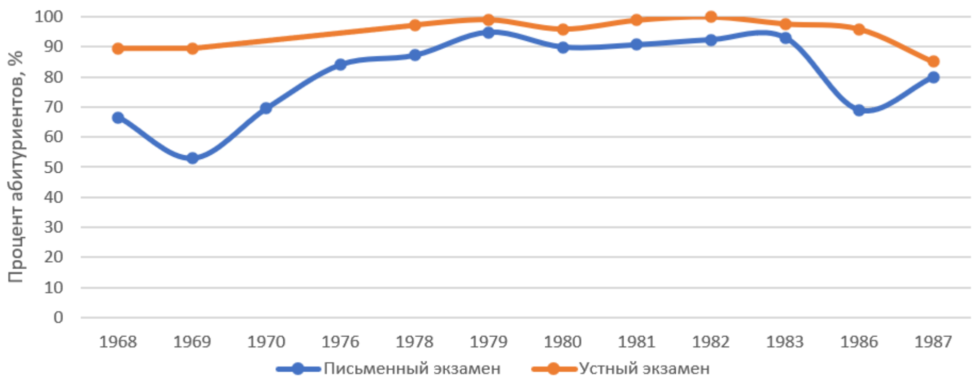


Рисунок 1 – Процент положительных результатов

По анализу рисунка 2 можно заключить, что, по сравнению с результатами 1976 года, в 1978 году возросло на 3 % количество абитуриентов, успешно сдавших письменный экзамен по математике. Кроме того, на 8 % возросло количество абитуриентов, успешно сдавших устный экзамен по математике по сравнению с 1968 и 1969 годами. Стоит отметить, что в 1976 году закончили школу выпускники, которые обучались по новой программе по математике с 9-го класса.

Если сравнивать результаты вступительных экзаменов по математике в МГПИ с результатами 1970 года, то можно сделать вывод, что в 1976 году количество абитуриентов, успешно сдавших письменный экзамен по математике, возросло на 15 %. При этом по сравнению с 1970 годом замечен значительный прирост качества сдачи письменного экзамена по математике.

Данный качественный прирост был обеспечен не столько переходом на новую программу по математике, а завершением перехода к обязательному среднему образованию. Вследствие этого количество выпускников средних образовательных учреждений увеличилось почти в два раза. Кроме того, 97 % школьников после восьмого класса продолжали получение среднего образования.

Сравнивая количество абитуриентов, сдающих письменный экзамен по математике в 1970 и 1976 годах, можно констатировать, что наблюдается их резкое снижение при поступлении в высшее учреждение. Таким образом, с 1976 года на письменных экзаменах МГПИ снизился «отсев» абитуриентов, не способных выполнить минимальное количество заданий по математике для получения удовлетворительной оценки.

Наибольший пик численности абитуриентов, успешно сдавших письменный экзамен по математике от их общего числа, можно зафиксировать в 1979 году.

Определим процент абитуриентов, которые получили оценки «5» и «4» на вступительных экзаменах по математике (рисунок 2).

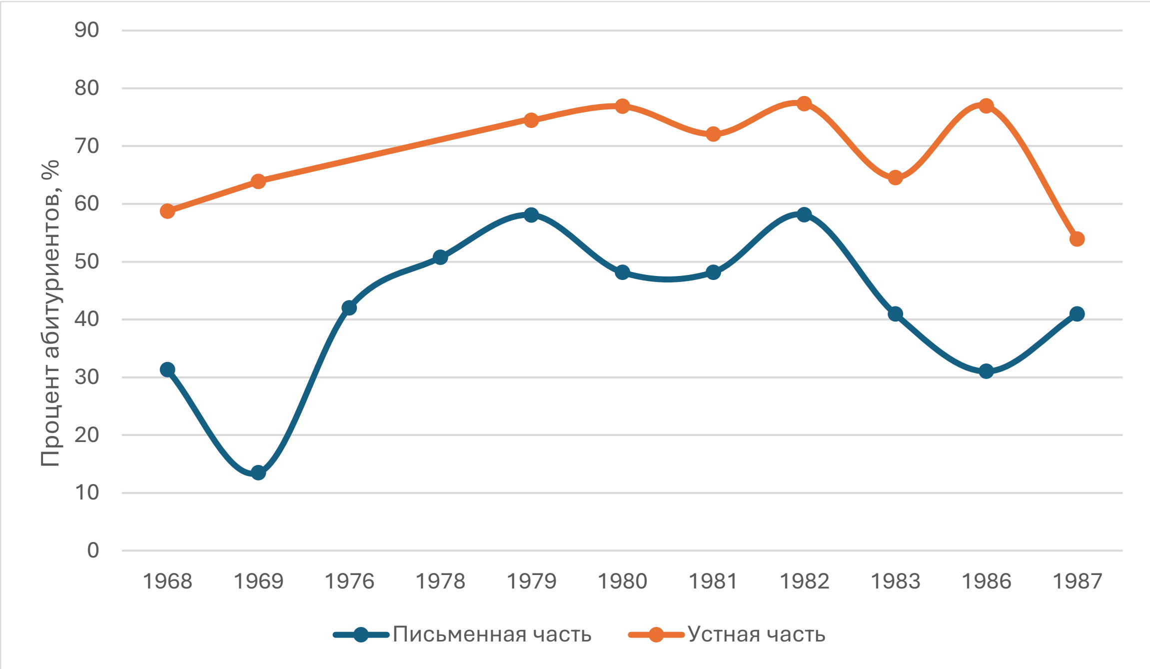


Рисунок 2 – Процент результатов «5» и «4»

Можно судить по количеству абитуриентов, получивших «5» и «4», что наибольший процент приходится на 1979 год. Абитуриенты данного года выпуска показали наиболее успешные результаты экзаменов.

Сопоставим количество абитуриентов, которые получили за письменную и устную часть экзамена по математике оценку «5» в процентном соотношении от общего числа сдававших (рисунок 3).

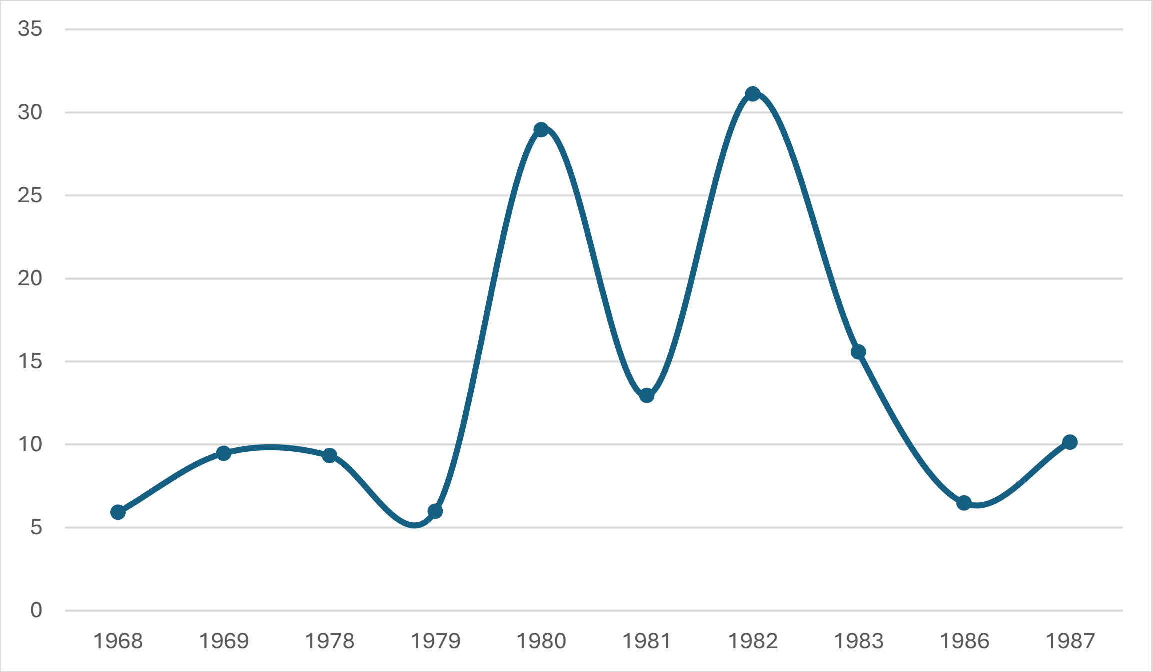


Рисунок 3 – Процент абитуриентов, получивших «5» в двух частях экзамена по математике

В 1979 году по данному параметру наблюдается наихудший результат. Сравнивая результаты 1978 и 1969 годов, наблюдаем, что разница между процентным содержанием «отличников» незначительная, а в 1979 году можно зафиксировать падение качества подготовки почти в два раза. Отмеченное падение можно объяснить тем, что ученики 10-го класса обучались уже по упрощенной программе, которая была скорректирована в кратчайшие сроки, не учитывая множества факторов, которые повлияли на данные результаты. Подчеркнем, что в 1978 году учебная программа по математике была сокращена, выпускники учились всего девять классов по «реформаторской программе», а последний год обучения уже шли по упрощенной программе.

Соотнося результаты, показанные на вступительных экзаменах по математике МГПИ в разные года, можно сделать вывод, что цель по повышению теоретического уровня была выполнена. Абитуриенты 1978 и 1979 года показывали наиболее высокие результаты сдачи вступительных испытаний.

Преподаватели Коломенского педагогического института представили свои результаты приема абитуриентов 1979 года. Письменный экзамен по математике показал, что на «4» и «5» сдали 45,5 % от общего числа абитуриентов, на «3» – 40,9 %, на «2» – 13,6 %. В КПИ примерно треть поступающих окончили сельские школы. Письменную работу по математике на «4» и «5» написали 49,2 % от общего числа городских школьников и 37,1 % от общего числа сельских, оценку «3» получили 40,1 и 47,1 %, оценку «2» – 10,7 и 15,8 %. Результаты устного экзамена по математике показали следующее: на «4» и «5» сдали 59,8 % городских абитуриентов и 41,1 % сельских, на «3» – соответственно 36,9 и 47,2 %, на «2» – 3,3 и 11,7 %. Из данных результатов видно, что выпускники сельских школ в большинстве случаев усвоили новую программу по математике на удовлетворительном уровне. Разница между уровнем знаний городских и сельских школьников присутствовала, но данные отличия не слишком велики. Отмечалось, что «в последние два-три года в институте улучшилась успеваемость студентов первого курса» [208, с. 44].

Следует отметить, что на основе сравнительно-сопоставительного анализа переведенных статистических данных МГПИ им. Ленина и отчетов преподавателей об итогах вступительных испытаний Коломенского педагогического института можно установить положительную динамику в наборе абитуриентов. Результативность письменных работ по математике, а также оценка экзаменаторами знаний на устном экзамене по математике абитуриентов, обучающихся по новой программе, действительно немного возросла, но при этом в большинстве источников отмечается, что уровень знаний по математике находился на удовлетворительном уровне.

В подтверждение данного вывода рассмотрим комментарии преподавателей других педагогических вузов о приеме абитуриентов, сдавших вступительные испытания по математике после реформы содержания общего математического образования 1970-х годов.

Преподаватели Ярославского педагогического института им. К.Д. Ушинского произвели анализ и сравнение результатов письменного экзамена по математике 1977 года абитуриентов, обучавшихся по новой программе по математике и по старой. По их данным, положительную оценку за письменную экзаменационную работу по математике получили 80,4 %, обучавшихся по старым учебным программам, 86,7 % обучавшихся по новым учебным программам; на оценку «5» и «4» выполнили работу 43,2 % абитуриентов, окончивших школу до 1977 года, 50,3 % – выпускники 1977 года. Как констатировалось, «уровень знаний абитуриентов вполне удовлетворительный» [96, с. 53].

Преподаватели математического факультета Барнаульского государственного педагогического института отмечали, что абитуриенты 1980 года приема обладали значительным запасом математических фактов школьной программы, умели использовать теоретико-множественную и логическую символику, геометрические обозначения [157, с. 50].

Из представленных отчетов педагогических вузов об итогах приемных экзаменов можно сделать вывод, что в целом уровень знаний абитуриентов «до реформы» и «после реформы» остался без изменений, однако существует в отдельных случаях небольшой прирост в показателях. Но по всем полученным сведениям, большинство экзаменаторов указывали на удовлетворительный уровень знаний.

Обобщая результаты письменных экзаменов по математике 1977–1979 годов, экзаменаторы констатировали снижение уровня знаний абитуриентов. Отмечалось, что «основными причинами этого (снижения знаний) являются недостатки новой школьной программы и в особенности неудачная ее реализация» [178, с. 38]. К недостаткам новой программы по математике относили плохое качество учебных пособий по математике и неподготовленность учителей для реализации программы.

Характерно, что именно к тому времени реформа содержания общего математического образования 1970-х годов официально была признана неудавшейся, а ее результаты неудовлетворительными [95, с. 90].

1.4.3 Влияние реформы содержания общего математического образования 1970-х годов на результаты вступительных экзаменов в технических вузах

Одной из главных задач реформы содержания общего математического образования 1970-х годов являлось улучшение математической подготовки технических специалистов.

Приемная комиссия МВТУ им. Н.Э. Баумана отмечала, что в 1977 году 75 % выпускников сдавали экзамен по новой программе по математике. Констатировалось, что выпускники овладели простейшими понятиями теории множеств, хорошо знали основные элементарные функции и прогрессии, успешно решали предусмотренные программой задачи на отыскание пределов [162].

Подчеркивалось, что в процессе обучения в школе по математике отработано исследование функций с помощью производной, построение с помощью производной несложных графиков. Многие абитуриенты демонстрировали хорошую технику дифференцирования. Однако, как отмечала экзаменационная комиссия, их навыки в выполнении тождественных преобразований выражений (особенно тригонометрических) были слабыми. Подводила абитуриентов также недостаточная проработка отдельных важных вопросов: было недопустимо много ошибок в решении квадратного уравнения и при построении графика квадратичной функции; недостаточны знания степенной функции; заметно утрачены поступавшими навыки построения графиков функций элементарными приемами и решения уравнений и неравенств графическим методом.

Экзаменаторами отмечалась серьезная недоработка в теоретических вопросах о пределе последовательности и функции. Абитуриенты редко без ошибок давали определение предела, понятие непрерывности функции они не связывали с понятием предела. Много неточностей допускали при изложении теории в разделах «Производная» и «Интеграл». На устном экзамене очень часто абитуриенты подменяли определения непрерывности, экстремума, монотонности функции их необходимыми или достаточными признаками. Кроме того, отмечалось, что в геометрии, при удовлетворительном уровне ответов по теории, выпускники плохо решали задачи по планиметрии. Поступавшие использовали векторы только при доказательстве теорем, применение векторов к решению задач практически было не освоено [162, с. 67].

В 1978 году произошел следующий выпуск школьников, обучавшихся по новой программе по математике. Преподаватели Новочеркасского политехнического института, анализируя результаты вступительных испытаниях по математике, отмечали, что у абитуриентов сформированы навыки в решении задач по новым программам по математике, но вызывают затруднения вопросы традиционного школьного курса – решение неравенств и уравнений; выполнение тождественных преобразований. По результатам устного экзамена отмечалось, что абитуриенты трактовали новые понятия более научно, использовали богатую математическую символику и язык, а также их объем знаний по теме «Функция» возрос по сравнению с результатами экзамена в предыдущие годы.

Также экзаменаторами отмечались бессистемность теоретических знаний абитуриентов по математике, низкий уровень пространственного мышления, слабая техника устных и приближенных вычислений. Кроме того, на основе анализа устного экзамена по математике констатировалось низкое усвоение материала по геометрии. Абитуриенты плохо доказывали теоремы, отмечалась большая путаница между условием и заключением теоремы. Констатировалось, что «содержание новых программных разделов … таких как «Геометрические преобразования», «Векторы» твердо усвоила примерно треть поступавших» [3, с. 38]. Отмечалось также, что абитуриенты применяют геометрические преобразования и векторы при решении задач. Вместе с тем, у абитуриентов вызывали большие затруднения задачи на доказательство, построение сечений, стереометрические задачи, требующие для своего решения применения формул тригонометрии. В целом констатировалось, что «отмена в школе экзамена по геометрии ослабила внимание учителей к этому предмету, что отрицательно сказалось на знаниях абитуриентов» [3, с. 38].

Преподаватели Воронежского государственного университета им. Ленинского Комсомола, характеризуя прием абитуриентов 1978 года, отметили следующее: в письменных работах по математике абитуриенты показывали, что возникают трудности при решении тригонометрических и логарифмических уравнений. Экзаменаторы отмечали, что характерны ошибки, свидетельствующие о механическом запоминании формул и определений. Также подчеркивался низкий уровень вычислительных навыков и незнание основных табличных тригонометрических значений. На устных экзаменах по математике наибольшие трудности вызвали вопросы из комбинаторики, также возникали сложности с понятиями предела, векторов. Зачастую абитуриенты показывали нетвердые знания из разделов старой программы по математике [198, с. 42].

В материалах преподавателей Киевского института инженеров гражданской авиации были представлены результаты письменного экзамена по математике 1978 года. Экзаменаторами было отмечено, что качественный уровень письменного экзамена находится на низком уровне, примерно 32 % всех абитуриентов получили оценки «4» и «5», «расхождение между опенками по математике в аттестатах и оценками вступительных экзаменов зачастую достигает двух, иногда трех баллов» [109, с. 45].

Преподаватели Московского энергетического института анализировали результаты вступительных испытаний по математике в период 1977–1979 годов. В 1977 году с переходом на новые программы по математике была изменена структура экзаменационных вариантов на вступительных испытаниях. Вместе с изменениями варианты заданий были упрощены по сравнению с вариантами 1976 года. Но при этом улучшения результатов не произошло: «результаты письменного экзамена 1977 года были хуже, чем в 1976 году» [178, с. 37].

Кроме того, на данном фоне в МЭИ в последующие годы происходили упрощения конкурсных заданий по математике. Так, в 1976 году число неудовлетворительных оценок за письменный экзамен по математике составляло 11,6 %, в 1977 – 17,1 %, в 1978 – 11,2 %, в 1979 – 8,7 %. Абитуриенты, сдававшие экзамены по математике в 1979 году, показали, что их подготовка хуже, чем подготовка прошлых лет. С упрощением экзаменационных заданий по математике снизился процент «отсева» абитуриентов.

Экзаменаторы подчеркивали характерные трудности, с которыми сталкивались абитуриенты: снижение вычислительных навыков, проблемы, связанные с решением уравнений и неравенств, в том числе выполнения тождественных преобразований. Также были отмечены серьезные проблемы в области геометрии, абитуриенты путали теоремы с аксиомами, признаки со свойствами: «не владеют основными понятиями и формулами геометрии, не умели применять их при решении задач» [178, с. 38].

Преподаватели Гомельского государственного университета, комментируя результаты поступления абитуриентов в 1979 году, отмечали, что лишь 18,7 % подтвердили свою оценку по математике, поставленную в аттестате. Отмечалось, что «абитуриента-79 можно охарактеризовать словами “или-или”. Или он берется за пример и решает его правильно, или вовсе не приступает к решению» [32, с. 42].

Преподаватели Московского полиграфического института, анализируя результаты вступительных испытаний с 1978 года, отметили характерные черты абитуриентов, обучавшихся по новой программе: недостаточно высокий уровень общей математической подготовки, плохо усвоен тригонометрический материал, трудности при решении геометрических задач [85].

Подводя итоги результатов вступительных испытаний в высших технических учебных заведениях и университетах, которые принимали абитуриентов, обученных по новой программе по математике, можно утверждать, что абитуриенты технических вузов показывали свой уровень знаний ниже, чем абитуриенты до реформы содержания общего математического образования 1970-х годов.

При сравнении с предыдущими приемами абитуриентов 1974–1976 годов, в рассматриваемом периоде конца 70-х годов преподавателями технических вузов было отмечено, что геометрический материал был усвоен «плохо, это объясняется тем, что геометрический материал был исключен из выпускных экзаменов по математике за курс средней школы, сказывалось также отсутствие стабильных школьных задачников и недостаточная практика» [198, с. 42].

Ошибки, допущенные абитуриентами в различных технических вузах на вступительных испытаниях по математике, повторялись затем на протяжении первой половины 1980-х годов.

1.4.4 Различия в сложности экзаменационного материала в педагогических институтах по сравнению с техническими вузами

Охарактеризуем различия в сложности экзаменационного материала в педагогических институтах от технических вузов. Сразу подчеркнем, что требования и уровень сложности экзаменационных работ по математике в педагогических вузах был, естественно, значительно ниже. В подтверждение данного положения рассмотрим экзаменационные варианты письменного экзамена по математике для МЭИ и МГПИ им. В.И. Ленина 1979 года [74; 178].

Вариант письменного вступительного экзамена МГПИ им. В.И. Ленина 1979 года:

1. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями:

$$y = -x^2 + 6x - 2 \text{ и } y = x^2 - 2x + 4.$$

2. Решить уравнение: $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = 0$
3. Решить неравенство: $\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3)$

4. В параллелограмме ABCD известны координаты вершин:
A(3; 1; 2), B(0; -1; -1); C(-1; -1; 0). Найти длину диагонали BD.
5. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD длина стороны основания равна a, длина высоты равна h, M – точка пересечения медиан граны BSC. Найти угол наклона прямой AM к плоскости основания пирамиды.

Вариант письменного вступительного экзамена МЭИ 1979 года:

1. Упростив выражение, найдите предел $\lim\limits_{x \to a}\left(\frac{ax^2-x^3}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^2-4\sqrt{ax}}-\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right)$
2. Найти область определения функции: $f(x)=\sqrt[4]{3^{x+5}-3^{x+1}-80}$
3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции:
$f(x)=\frac{5}{21}-x^2-\frac{2}{21}x^3$ на отрезке [-2; 1] и построить ее график на указанном промежутке.
4. Найти все корни уравнения $tg^2x-2\sin^2 x=0$, лежащие на интервале $(-\frac{3}{4}\pi; 2\pi)$.
5. Основанием призмы является прямоугольный треугольник с острым углом a и гипотенузой c. Длина высоты призмы равна h. Определить длину ребра куба, объем которого равен объему данной призмы.

В варианте МГПИ представлены задачи на: 1) вычисление площади фигуры с использованием интеграла; 2) решение тригонометрического уравнения; 3) решение логарифмического неравенства; 4) решение с векторами; 5) стереометрическая задача.

В варианте МЭИ представлены задачи на: 1) вычисление предела функции; 2) решение показательного неравенства; 3) определение наибольшего и наименьшего значения функции; 4) тригонометрическое уравнение; 5) стереометрическая задача.

Из предварительного обзора задач следует, что выражения, содержащие в экзаменационной работе МЭИ, требуют для решения большее количество шагов преобразований, чем в работе для абитуриентов МГПИ. Стоит также отметить, что в 1979 году абитуриенты МГПИ достигли самых высоких показателей по сравнению с показателями других годов приема.

В целом отметим, что при анализе результатов экзаменов по математике в педагогические вузы была видна даже положительная динамика в результатах. В технических вузах была ситуация противоположная, но обобщая их результаты, можно констатировать, что абитуриентами новая программа по математике была усвоена на удовлетворительном уровне.

1.4.5 Результаты вступительных экзаменов по математике в техникумы после восьмого класса

Кроме результатов поступления выпускников в вузы, следует проанализировать результаты поступления в техникумы после восьмого класса. Так, например, в публикациях были проанализированы результаты поступления абитуриентов в Московский электротехнический и Московский автомобильно-дорожный техникумы 1976 года приема.

На дневные отделения поступали более 50 % выпускников школ со средним баллом аттестата от «3» до «3,5», только 19 % абитуриентов имели средний балл от «4» до «5». Приемной комиссией техникумов было отмечено, что одним из существенных недостатков в знаниях учащихся по математике является низкая культура вычислительной работы. Что касается выпускников 8-х классах, те также выказывали аналогичные проблемы, как и выпускники 10-х классов. Констатировалось, что «поступавшие в техникумы значительно лучше владеют десятичными дробями, чем обыкновенными; арифметика обыкновенных дробей – по-прежнему их больное место» [140, с. 39].

Также было отмечено, что абитуриенты плохо умели выполнять вычисления с помощью логарифмической линейки, не умели пользоваться таблицами, у них отсутствовали практические навыки использования теорем при решении геометрических задач.

Вследствие данных проблем при приеме были обнаружены расхождения между оценкой в аттестате по математике и оценкой, полученной за экзамен: «Очень многие абитуриенты с оценками “4” или “5” получили на вступительных экзаменах оценку “3”» [56, с. 38].

Проанализированные результаты вступительных испытаний в вузы и техникумы в целом отражали противоречивый характер результативности реформы содержания общего математического образования 1970-х годов. На основе представленных результатов вступительных экзаменов по математике в различных учебных заведениях можно составить перечень проблемных мест, которые носили общий характер.

К наиболее распространенным проблемам в знаниях по математике выпускников школ можно отнести следующие:

1. Низкие вычислительные навыки.
2. Трудности работы с тригонометрическими табличными величинами.
3. Проблемы при выполнении равносильных преобразований в уравнениях и неравенствах.
4. Плохо усвоенные элементы математического анализа (понятие предела, дифференцирование и интегрирование функций).
5. Низкий уровень знаний в области геометрии (особенно по темам «Векторы», «Геометрические преобразования»).
6. Трудности в понимании свойств показательных и логарифмических функций, а также в их построении.
7. Формальные знания и «механическое» заучивание формул, определений, теорем.

Проанализированные результаты вступительных испытаний в технические вузы и техникумы показали, что цели, поставленные реформой содержания общего математического образования 1970-х годов, не были достигнуты. Внедрение нового материала в школьный курс математики не дало прироста к повышению теоретического уровня учащихся, а модернизация учебного материала не привела к планируемым результатам. Проблемы заключались не только в новом материале, который был интегрирован в новый учебный план, но и в старом материале: ученики стали хуже выполнять тождественные преобразования, отмечались проблемы в устном счете, а также трудности при решении геометрических задач.

Главной причиной неудачи реформы содержания общего математического образования является время, а вернее его дефицит. Кардинальное изменение всего математического курса было произведено слишком стремительно. Не была своевременно создана прочная методическая база нового материала и разработаны качественные учебные пособия, понятные учащимся. Также не была осуществлена своевременная переподготовка учителей для работы по новой программе. Непонимание обучающимися школьных учебников, неквалифицированность неподготовленных учителей вызывали завышение оценок, что в итоге проявилось на вступительных экзаменах в вузы.

Удовлетворительный уровень знаний учащихся абсолютно не соответствовал планируемым результатам реформы. Решение о том, что реформа содержания общего математического образования 1970-х годов являлась неудавшейся, было принято Министерством просвещения СССР [95, с. 90].

А ведь по замыслу реформаторов именно теоретико-множественный подход должен был модернизировать школьную программу по математике.

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

В 1960–1980-е годы в СССР произошла модернизация содержания общего образования. Изменения коснулись и школьных дисциплин, и всей системы образования. Центральное место занимала реформа математического образования 1970-х годов, которая была обусловлена двумя группами факторов: внешних и внутренних.

Внешней причиной реформаторского движения стали работы группы французских математиков под названием Бурбаки, которые предлагали изменить структуру математического курса, опираясь на идеи множеств, структуры и преобразований. Недостатки реформ в СССР и других государствах имели сходные черты: это и избыточная абстрактность, и формализация, а также сложность новых учебных планов и пособий [203].

Вместе с тем, в то время руководство СССР осознало проблему разрыва между школой и жизнью. Это стало внутренней причиной реформирования образования. В 1958 году был принят закон «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР», который акцентировал связь школы с производством и профессиональной подготовкой, ввел всеобщее 8-летнее образование вместо 7-летнего и увеличил полное среднее образование до 11 лет [146, с. 53]. Старшеклассники дневных школ должны были работать на предприятии два дня в неделю. В данной связи стала осуществляться деятельность по политехнизации образования и продлению срока обучения в средней школе, что подтолкнуло к поиску новых методов повышения научного уровня преподавания математики в образовательных учреждениях.

В 1964 году вышло постановление ЦК КПСС, по которому все школы страны вновь переходили на 10-летнее обучение. При этом обязательным оставалось всеобщее 8-летнее образование. Это было необходимо для реализации амбициозного плана СССР – стать первой в мире страной по объему производства, опередив западные капиталистические страны [146].

В 1966 году ЦК КПСС и Совет Министров СССР приняли постановление «О мерах дальнейшего улучшения работы средней общеобразовательной школы» [146, с. 219]. Согласно ему, Министерство просвещения должно было улучшить уровень подготовки учащихся с помощью пересмотра учебных планов и программ, а также совершенствования пособий. В результате в 1969 году была проведена масштабная реформа системы общего образования. Срок обучения стал составлять 10 лет, причем основное общее обучение начиналось с 4-го класса, а начальная школа становилась трехлетней.

Все это требовало появления новых реформаторских процессов, которые должны были стать частью глубоких изменений во всех сферах жизни. Необходимо было переосмыслить подходы и сформировать новую образовательную идеологию, которая заложила бы основу для радикальных преобразований в системе образования. Эти факторы в совокупности стали мощным стимулом для начала реформ в области математического образования [104; 212].

Развитие теоретико-множественного подхода в мире вызвало смену парадигмы: парадигму классической математики сменила научная (теоретико-множественная) парадигма. Новая парадигма внедрялась в образовательную систему разных стран вариативно. Так, в СССР начальная школа обучалась по парадигме классической математики, а оставшаяся часть по научной (теоретико-множественной).

Рассматривая данные парадигмы, можно отметить их различия в ядре. Так, в иерархической структуре принципов обучения (рисунок 4) представлена их противоположная приоритетность.

Рисунок 4 – Иерархия принципов обучения в парадигмах

В рамках парадигмы классической математики принцип доступности являлся ведущим. Обучение было ориентировано на массового ученика. Со сменой парадигмы изменился приоритет данного принципа. Соответственно, принцип научности обучения был наиболее приоритетным.

В советском общем математическом образовании приоритет введения в школьный курс математики теоретико-множественного подхода принадлежит академику АПН СССР А.И. Маркушевичу и академику АН СССР А.Н. Колмогорову. В 1970-х годах была кардинально изменена структура, содержание и методика преподавания математики в СССР. В школьный курс ввели теоретико-множественный подход, заимствованный из зарубежного математического образования того времени. Реформаторы считали, что традиционная система образования устарела и нуждалась в модернизации [214].

В классической математике акцент делался на знаниевый подход и развитие вычислительных навыков. Математическое образование было направлено на подготовку к практической деятельности. В научной парадигме приоритетным было развитие понятийного мышления, использование общенаучных методов для познания мира. Исследовательские навыки и умение мыслить имели приоритет над вычислительными навыками.

В школьном курсе «Арифметика» парадигмы классической математики основное внимание уделялось умению работать по алгоритму и вычислять с опорой на свойства аддитивности. Практиковалось решение текстовых задач, которое сводилось к алгоритмическому выполнению действий. Умение безошибочно вычислять количественные показатели предметов занимало ведущее место. В новой парадигме курс «Математика» основывался на понятии «множество» и действиях над ними (пересечение, объединение, разность и т. д.). Сложение двух чисел рассматривалось как пересечение двух множеств. Остальные арифметические действия строились на основе теоретико-множественного подхода. Главной задачей курса было не развитие вычислительных навыков, а внедрение термина «множество», а также закрепление умения выполнять логические операции с множеством.

В курсе «Алгебра» в рамках классической математики основное внимание уделялось тождественным преобразованиям. Тождественные преобразования трактовались как операции над буквенными выражениями. На их основе раскрывались другие линии курса «Алгебра». Понятие «функция» также занимало важное место в парадигме «классическая математика», при этом функциональная линия рассматривалась как результат подстановки числовых выражений вместо буквенных в тождество. В курсе «Алгебра» в новой парадигме ведущее место занимала функциональная зависимость, основанная на понятии «множество». Изучение линии «тождество» было неразрывно связано с понятием «функция». Буквенные выражения рассматривались как переменные, а тождественные преобразования основывались на условии равенства функций. С помощью исследования свойств функции вводились другие линии алгебры.

В курсе «Геометрия» парадигмы «классическая математика» использовался логико-эвристический подход. Теоремы строились и обосновывались на основе практического эксперимента и логики. В новой парадигме курс «Геометрия» строился на основе аксиоматического подхода. Центральным понятием было «отображение», эквивалентное понятию «функция» в курсе «Алгебра». С помощью «отображений» развивалась линия геометрических преобразований. В отличие от классической математики теоретико-множественная парадигма сводила к минимуму эмпирическое обоснование. Весь курс геометрии строился на аксиоматике и понятии «геометрические преобразования».

В 1977 году приемные комиссии проанализировали результаты вступительных экзаменов по математике в вузы. Выяснилось, что реформа не достигла запланированных результатов – повышения теоретического уровня знаний школьников. Абитуриенты, обучавшиеся по новой программе, показали более низкие результаты по сравнению с результатами предыдущих годов и традиционной программой.

Из-за неудовлетворительных результатов вступительных испытаний в 1978 году реформа содержания общего математического образования была признана «неудавшейся» [95, с. 88]. В 1979 году в системе общего математического образования отказались от теоретико-множественного подхода. Методика, структура и содержание обучения вернулись к «дореформенному» уровню. При этом основная школа начиналась с 4-го класса, а срок обучения оставался прежним. Многие темы из математического анализа и геометрические преобразования были сохранены в программе.

Анализ итогов вступительных экзаменов по математике в вузы конца 1970-х годов показал, что реформа общего математического образования не достигла успеха из-за неподготовленности учителей и отсутствия методической базы. Несвоевременная переподготовка учителей, непроработанная методика обучения и недоработанные учебные пособия не позволили реформе вывести математическое образование на более высокий качественный уровень.

Инициаторы реформы не смогли увидеть более крупные проблемы из-за сжатых сроков внедрения. Комиссия по математическому образованию рекомендовала изменить учебники под редакцией А.Н. Колмогорова и А.И. Маркушевича: упростить язык, исключить новую символику и отказаться от широкого использования обобщающих идей [181].

1970-е годы ознаменовались попытками исправить ошибки прошлого советского образования. Реформа содержания общего математического образования 1970-х годов, несмотря на свою незавершенность, позитивно повлияла на общее математическое образование в СССР. Она модернизировала его содержание и смогла внедрить новые темы в школьный курс. Поэтому полного возвращения к «дореформенным программам» не произошло. В новых учебниках сохранились начала математического анализа и аналитической геометрии [1].

Идея А.Н. Колмогорова о разработке единого курса математики реализовалась: ученый «впервые предложил концепцию школьного математического образования, которая позволила объединить разнородные школьные предметы в единый курс математики» [1, с. 207].

В современной программе математического образования сохранены темы, предложенные в процессе реформы содержания общего математического образования 1970-х годов: «Геометрические преобразования», «Векторы», а также «Предел функции», «Интегралы», «Производные» и другие темы из математического анализа. Реформа также внедряла в школьный курс элементы комбинаторики и теории вероятности, которые сохранились в современной учебной программе [187].

Одним из главных выводов проведенного исследования стало то, что качество образовательного процесса тесно связано с сохранением отечественных педагогических традиций, а также с их ключевыми принципами, такими как систематичность и целостность. Эти принципы не должны быть прерваны.

ГЛАВА 2. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОЦЕССОВ РЕФОРМИРОВАНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ОБЩЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В 1960–1980-е ГОДЫ

2.1 Сравнительно-сопоставительный анализ учебных планов и программ общего математического образования в 1960-е годы

2.1.1 Сравнительно-сопоставительный анализ учебных планов 1960 и 1968 годов

Чтобы полностью установить изменения в учебном плане по математике, который принимался в 1968 году в соответствии с реформой общего математического образования, необходимо в сравнительно-сопоставительном плане рассмотреть учебный план по математике восьмилетней школы с 5-го по 8-й классы, принятый в 1960 году. Для рельефности анализа данных представим их в таблицах 2 и 3 [36; 177].

Таблица 2 – Учебный план по математике восьмилетней школы 1960 года

Название темы	**Количество часов**
5 класс Арифметика (6 часов в неделю; всего 216 часов)	
1. Натуральные числа	40
2. Обыкновенные дроби	66
3. Десятичные дроби	66
4. Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями. Отношение величин	24
5. Повторение. Измерение на местности	12
6 класс Арифметика (4 часа в неделю в первом полугодии; всего 64 часа)	
1. Приближенные вычисления	16
2. Проценты	18
3. Пропорции. Прямая и обратная пропорциональность	24
4. Повторение	6

Продолжение таблицы 2

Алгебра (4 часа в неделю во втором полугодии; 80 часов)	
1. Алгебраические выражения	12
2. Рациональные числа. Уравнения	24
3. Действия над целыми алгебраическими выражениями	40
Геометрия (2 часа в неделю; всего 72 часа)	
1. Основные понятия	16
2. Треугольник	30
3. Параллельность	20
4. Повторение	6
7 класс Алгебра (4 часа в неделю в первом полугодии и 3 часа во втором; всего 124 часа)	
1. Уравнение в первой степени с одним неизвестным	24
2. Разложение многочленов на множители	28
3. Алгебраические дроби	32
4. Координаты и простейшие графики	12
5. Система уравнений первой степени с двумя неизвестными	20
6. Повторение	8
Геометрия (2 часа в неделю в первом полугодии и 3 часа во втором; всего 92 часа)	
1. Четырехугольники	20
2. Площадь многоугольника. Поверхность и объем прямой призмы	30
3. Окружность	34
4. Повторение	8
8 класс Алгебра (3 часа в неделю в первом полугодии и 2 часа в неделю во втором; всего 86 часов)	
1. Счетная (логарифмическая) линейка	9
2. Квадратный корень и квадратные уравнения	44
3. Функции и графики	23
4. Повторение	10
Геометрия (2 часа в неделю в первом полугодии и 3 часа в неделю во втором полугодии; всего 89 часа)	

Продолжение таблицы 2

1. Пропорциональные отрезки. Подобные фигуры	30
2. Тригонометрические функции острого угла	15
3. Вписанные и описанные многоугольники	12
4. Вычисления площадей и объемов геометрических тел	20
5. Повторение	12

Проанализировав данную таблицу, можно отметить, что на протяжении всего срока обучения математика (арифметика, алгебра и геометрия) преподавалась 6 часов в неделю. С 6-го класса добавлялся предмет «Геометрия», арифметика в 6-м классе со второго полугодия заканчивалась, а на смену ей приходила алгебра. Начиная с 7-го класса, во втором полугодии в 7 и 8-м классах увеличивалось преподавание геометрии на 1 час, а преподавание алгебры соответственно уменьшалось.

Характеризуя данный учебный план, обратим внимание на разделение учебных предметов в течение 6-го класса, а именно переход от арифметики к алгебре. По нашему мнению, в данном случае разделение предметов не являлось целесообразным и не несло никакого положительного эффекта, лишь усложняя работу издателям (издавать два учебника для 6-го класса вместо одного).

К недостаткам, по нашему мнению, можно отнести малое количество часов на изучение темы: «Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями». Именно данная тема являлась наиболее проблемной, кроме того, обычно ученики плохо усваивали действия с обыкновенными и десятичными дробями, что отражалось на навыках в старших классах. Тема «Натуральные числа» была рассчитана на 40 часов, данное решение считаем нецелесообразным, поскольку в начальной школе действия над натуральными числами являлись одной из основных задач в подготовке учеников.

В 6-м классе на отработку действий с отрицательными дробями выделено чрезвычайно мало времени, поэтому именно вычислительные навыки с дробями и отрицательными числами были наиболее слабым местом выпускников.

Анализируя учебный план 1960 года, следует отнести к его достоинствам то, что центральные темы: «Натуральные числа», «Обыкновенные дроби», «Десятичные дроби», «Отрицательные числа» распределялись целесообразно в течение всего периода обучения, а также были учтены возрастные особенности учащихся. Курс геометрии составлен с требованиями того времени, был сделан упор на политехническое обучение.

В целом, учебный план 1960 года был достаточно оптимальным, в нем были раскрыты основные позиции, требующиеся для обучения математике. В данном плане был сделан упор на формирование навыков приближенного вычисления, а также умение использовать логарифмическую линейку.

Рассмотрим учебный план восьмилетней школы (таблица 3), который был одобрен Министерством просвещения СССР в 1968 году. В составлении данной программы принимали участие видные ученые-математики: В.Г. Болтянский, А.Н. Колмогоров, Ю.Н. Макарычев, А.И. Маркушевич, Г.Г. Маслова, К.И. Нешков, А.Д. Семушкин, А.И. Фетисов, А.А. Шершевский, И.М. Яглом [177].

Таблица 3 – Учебный план по математике восьмилетней школы 1968 года

Название темы	**Кол-во часов**
4 класс Арифметика и начала алгебры (6 часов в неделю, всего 210 часов, включая 30 часов на геометрию)	
1. Натуральные числа	85
2. Целые числа	45
3. Десятичные дроби	50
Геометрия (30 часов распределены в течение учебного года)	
1. Основные геометрические понятия	30
5 класс Арифметика и начала алгебры (6 часов в неделю, всего 210 часов, включая 35 часов на геометрию)	
1. Делимость чисел	20
2. Действия с обыкновенными и десятичными дробями	85
3. Рациональные числа. Формулы и координаты	70
Геометрия (35 часов распределены в течение учебного года)	

Продолжение таблицы 3

1. Геометрические построения	25
2. Площади	10
6 класс Алгебра (4 часа в неделю; всего 140 часов)	
1. Систематизация приобретенных в 4–5 классах представлений о задачах алгебры	12
2. Отношения, пропорции, одночлены	40
3. Целые выражения	48
4. Уравнения и системы уравнений	40
Геометрия (2 часа в неделю; всего 70 часов)	
1. Параллельность и перпендикулярность. Осевая и центральная симметрия	60
2. Параллельный перенос	10
7 класс Алгебра (3 часа в неделю в первом полугодии и 4 часа во втором полугодии; всего 122 часа)	
1. Рациональные выражения	40
2. Системы счисления. Арифметические устройства вычислительных машин	10
3. Неравенства. Приближенные вычисления. Извлечение корней	72
Геометрия (3 часа в неделю в первом полугодии и 2 часа в неделю во втором; всего 88 часов)	
1. Окружность и поворот	30
2. Движения	10
3. Пропорциональность отрезков. Подобие фигур	36
4. Систематизация сведений о стереометрии, полученных на уроках черчения	12
8 класс Алгебра (4 часа в неделю; всего 140 часов)	
1. Квадратные уравнения	30
2. Числовые последовательности. Арифметические и геометрические прогрессии	25
3. Дробные показатели степени	30
4. Показательная и логарифмическая функция	35
5. Повторение	20

Продолжение таблицы 3

Геометрия (2 часа в неделю; всего 70 часов)	
1. Измерение площадей и объемов	25
2. Метрические соотношения в треугольнике. Тригонометрические функции	30
3. Повторение	15

Отметим, что в учебном плане 1960 года в состав основной школы входили всего 4 года обучения математики (с 5-го до 8-го класса). С принятием учебного плана по математике 1968 года ее изучение начиналось с 4-го класса и длилось уже 5 лет [105].

Поскольку в 1960 году в основной школе было 4 года обучения математики, а в 1968 году – 5 лет, рассмотрим в начале дисциплину «Арифметика», которая изучалась по учебному плану 1960 года 1,5 года (5-й класс и половина 6-го) и «арифметику и начала алгебры», которая изучалась в новой программе – 2 года (5 и 6-й классы).

Анализируя новый учебный план по математике 1968 года, можно отметить, что курс арифметики теперь начинался с 4-го класса и продолжался до 6-го класса. Кроме того, в курс арифметики были интегрированы в 4-м классе 30 часов геометрии, а в 5-м классе 35 часов, которые были распределены в течение учебного года.

Начиная с 6-го класса, предмет геометрия становился в школьном курсе самостоятельным. В 7-м классе в первом полугодии делался акцент на изучение геометрии, а во втором – уже на алгебру. В 8-м классе указанные часы преподавания сохраняли свое количественное значение без изменений в течение всего учебного года.

Поскольку в курс «Арифметика» были включены темы из геометрии, то правомерно вычислить часы именно курса «Арифметика» и сопоставить их с прежней программой. Увеличение учебного срока подразумевало увеличение количества часов на изучение дисциплины. В учебном плане 1960 года на курс «Арифметика» отводилось 280 часов, а в новой программе отводилось уже 355 часов.

Главная новация в курсе «Арифметика» – это изменение содержания самого курса. По старой программе по арифметике в 5-м классе изучались следующие темы: «Натуральные числа»; «Обыкновенные дроби»; «Десятичные дроби». Во втором полугодии 6-го класса уже в рамках курса алгебры изучалась тема «Отрицательные числа» [36].

По новому учебному плану обучение арифметике начиналось с 4-го класса со следующих тем: «Натуральные числа»; «Отрицательные числа»; «Десятичные числа», и только в 5-м классе изучалась тема: «Обыкновенные дроби». Как следует из данных тем, по новому учебному плану изучение отрицательных чисел начиналось в 4-м классе, а не в 6-м. Кроме того, обыкновенные дроби изучались теперь после изучения десятичных дробей, а не до их изучения, как было раньше.

Такое изменение порядка последовательности изучения тем вызвало широкое обсуждение. В.Г. Ашкинузе, В.И. Левин, А.Д. Семушкин поддерживали данную перестановку, аргументируя тем, что «десятичные дроби должны вводиться не как частный случай обыкновенных, а в результате естественного продолжения принципа десятичной нумерации» [10, с. 41]. Изучение десятичных дробей до изучения обыкновенных должно было помочь ученикам в выполнении следующих операций: сокращение десятичных дробей, приведение дробей к общему знаменателю, округление и т. д.

Современный исследователь И.П. Костенко, напротив, критиковал данное изменение в учебном плане 1968 года, объясняя свою позицию недостаточностью аргументации авторами данного изменения тем. По его убеждению, «скрытая цель этого изменения и всех других предложений была расчистить в программе место для нововведений» [105, с. 154]. А экспериментальное внедрение программ в ряде школ, на которую ссылались создатели новой программы, И.П. Костенко не считал за аргумент в поддержку программ, так как сомневался в объективности данного эксперимента.

Кроме того, как ранее было отмечено, количество часов, отводимое на курс арифметики, было увеличено, соответственно, было увеличено время и на изучение данных тем. Так, тема «Натуральные числа» увеличилась на 45 часов, «Отрицательные числа» – на 21, тема «Десятичные дроби» – наоборот, была уменьшена на 16 часов, а тема «Обыкновенные дроби» увеличена на 19 часов [177].

Итого, в учебном плане 1960 года на эти ключевые темы отводилось 196 часов, а по новому учебному плану – 265 часов. Причем акцент в нем был сделан на теме «Натуральные числа». По мнению авторов, это обусловлено необходимостью систематизировать знания, полученные в начальной школе, поскольку основная школа начиналась с 4-го класса, а за три года в начальной школе ученики не успевали отработать свои навыки в вычислении и применении арифметических действий с натуральными числами.

Кроме того, увеличение количества часов в теме «Обыкновенные дроби» было обусловлено тем, что в состав данной темы входило не только изучение понятия «обыкновенная дробь», но и все арифметические действия с ними, а также с десятичными дробями и натуральными числами. Помимо того, что по новой программе в 4-м классе в начале изучались десятичные дроби, а в 5-м классе обыкновенные, в 4-м классе теперь изучалась тема «Целые числа» (положительные и отрицательные числа), когда по старой программе данную тему изучали во втором полугодии 6-го класса.

Введение отрицательных чисел в более раннем возрасте аргументировалось следующим: «Откладывать далее введение отрицательных чисел нельзя, если желать приучить учащихся достаточно рано к решению задач алгебраическим методом (при помощи составления уравнений), а не искусственными приемами» [105, с. 226]. Так, С.Л. Соболев на заседании Общего собрания Отделения математики Академии наук СССР в 1978 году отметил, что «отрицательные числа ребята воспринимают в возрасте дошкольном» [95, с. 51].

Вместе с тем, на том же заседании Л.С. Понтрягин заявил, что «изучение отрицательных чисел, а потом и изучение десятичных дробей по данной программе нелепость, которая не может не вызвать у школьников недоумения» [169, с. 58]. И.П. Костенко также считал, что введение в таком раннем возрасте достаточно сложного понятия, как «отрицательные числа», вызовет «у учеников ощутимые затруднения, что повлияет на их вычислительные способности в будущем» [105, с. 226].

Стоит также отметить, что тема «Рациональные числа» была перенесена из курса алгебры 6-го класса в новый курс арифметики 5-го класса. В объяснительной записке к новой программе данное изменение аргументировалось тем, что изучение формул, в том числе формулы движения ($s = vt$), помогало ученикам в усвоении материала физики, который будет у них в начале 6-го класса. Кроме того, по мнению создателей нового учебного плана, введение уравнений позволяло качественнее организовывать обучение по решению текстовых задач. А.И. Маркушевич поддерживал идею А.Я. Хинчина: «В 5-м классе при решении арифметических задач следует использовать простейшие уравнения и системы» [144, с. 19].

И.П. Костенко был убежден, что решение текстовых задач с помощью уравнений не развивает мышление у школьников: «Здесь начало разрушения классической методики обучения решению задач, методики постепенного развития мышления учащихся» [105, с. 135].

Помимо рассматриваемых центральных тем арифметики, дискуссию вызывали темы из блока геометрии, которые уже были вплетены в курс арифметики 4-го класса. Курс математики начальной школы попытались обновить только за счет более ранней алгебраической и геометрической пропедевтики (явного изучения простейших уравнений)» [95, с. 12].

По новому учебному плану в состав арифметики входили 30 часов геометрии, которые были распределены в течение всего года. Четких указаний, когда должны изучаться данные темы, сформулировано не было. В пояснительной записке к новой программе математики указывалось: «Часы, отводимые на геометрию в 4–5 классах, распределяются в течение года по усмотрению учителя» [177, с. 12]. Данная формулировка интерпретировалась разными учителями свободно, соответственно курс геометрии проходил у каждого учителя в свое время.

Итак, различия между учебными планами 1960 и 1968 годов очень значительные, в аспекте модернизации общего математического образования учебный план 1968 года имел свои достоинства и недостатки. Из достоинств, по нашему мнению, можно отнести введение начальных геометрических понятий. Раннее внедрение геометрических основ способствует повышению пространственного мышления, которое по большей части у учеников находится на низком уровне.

Геометрия и решение задач по геометрии всегда вызывали у учеников определенные сложности и непонимание шагов их решения. Пространственное мышление напрямую влияет на составление геометрических чертежей для решения задач, неумелое построение чертежа для геометрической задачи является одной из главных причин неправильного решения. Введение отрицательных чисел в 4-м классе было недопустимым в силу того, что изучение данной темы являлось сложным для данного возраста.

Даже в настоящее время учащиеся 7-го класса в возрасте 14 лет зачастую испытывают затруднения в действиях над отрицательными и положительными числами, для 10-летних детей изучение такой сложной темы являлось непосильной задачей. Введение темы «Десятичные дроби» после темы «Натуральные числа» имело смысл. По нашему мнению, данное изменение уместно, поскольку алгоритм действий над десятичными числами схож с натуральными числами. Изменение времени на изучение центральных тем было выполнено более рационально, поскольку натуральные числа, десятичные числа вызывали меньше трудностей, чем отрицательные числа и обыкновенные дроби.

Кроме того, упор на решение задач алгебраическим способом с раннего возраста, по нашему мнению, являлся нереализуемой идеей, поскольку при решении задач алгебраическим способом ученик должен был составить верное уравнение, учитывая параметры из условия задачи. Кроме того, ученик должен был четко понимать, какую величину необходимо обозначить за неизвестную переменную.

Введение алгебраического способа решения текстовых задач зачастую вызывает у учеников непонимание при обозначении неизвестного и при составлении уравнения. На практике у многих учеников 5-го класса (тем более 4-го класса) вызывает сложности решение текстовых задач даже арифметическим способом в силу того, что ученики не понимают, какие арифметические действия им необходимо применить для выполнения того или иного действия.

2.1.2 Сравнительно-сопоставительный анализ учебных программ 1960 и 1968 годов

Новая программа по математике для восьмилетней школы, принятая в 1960 году, указывала на необходимость ознакомления учащихся с общими идеями и методами математики, дедуктивным характером ее построения. В процессе обучения учащиеся должны были приобрести навыки работы с книгой, со справочниками, таблицами и графиками.

В новой учебной программе особое внимание было уделено развитию вычислительных умений, что привело к увеличению часов, выделенных на изучение десятичных дробей и обучение навыкам приближенных вычислений.

Объяснительная записка к программе ориентировала на широкое использование приближенных вычислений при изучении всего последующего курса математики по родственным дисциплинам, приемам решения уравнений первой и второй степени и их систем, ознакомление с системой координат и простейшими графиками. В данной связи в 6-м классе была введена новая тема «Приближенные вычисления», на которой систематизировались ранее освоенные знания, объяснялось понятие абсолютной погрешности и разбирались операции с приближенными числами [36].

В программе курс арифметики в восьмилетней школе оставался практически неизменным, однако особое внимание уделялось развитию вычислительных навыков. В результате было увеличено количество часов, отведенных на изучение десятичных дробей и приближенных вычислений. В 6-м классе была добавлена отдельная тема, посвященная приближенным вычислениям.

Курс алгебры стал включать освоение алгебраической символики, работу с рациональными числами, одночленами и многочленами, а также знакомство с системой координат и простыми графиками. В 8-м классе началось изучение счетной (логарифмической) линейки, а также само приближенное извлечение квадратных и кубических корней. По теме «Проценты» вводилось понятие относительной погрешности [193].

В курсе «Алгебра и элементарные функции» изучались арифметические операции и уравнения, расширение концепции числа, ключевые элементарные функции и их графики, а также вводились базовые элементы математического анализа, такие как пределы и производные. Последовательнее по сравнению с предшествующими программами строилось изучение функций. Это выразилось во введении функциональной пропедевтики и в более раннем ознакомлении детей с понятием функции и прямоугольной системой координат. Впервые в курсе была рассмотрена степенная функция.

В 8-м классе вводилось изучение вычисления по счетной (логарифмической) линейке, также вводились элементы приближенного вычисления значений корней второй и третьей степени. В разделе о показательной и логарифмической функции объяснялось теоретическое основание для работы с логарифмической линейкой.

Учебный курс математики в старших классах охватывал как алгебру с элементарными функциями, так и геометрию. В 11-м классе программа алгебры была дополнена семестровым курсом высшей математики, охватывающим такие темы, как «Абстрактные функции и их свойства», «Пределы», «Производные», «Исследование функций», а также теорему Безу. Но увеличение продолжительности обучения на год не улучшило реальные знания учащихся и замедлило их вовлечение в общественную и производственную деятельность [105].

Программа геометрии охватывала как планиметрию, так и стереометрию, особое внимание уделялось геометрическим преобразованиям и понятию вектора. Кроме того, в программу были включены вопросы из курса стереометрии, связанные с вычислениями объемов и площадей, которые необходимы для решения практических задач. Курс планиметрии не претерпел резких изменений.

В геометрии были представлены задачи, касающиеся вычисления площадей, поверхностей и объемов различных фигур. В разделе «Решение треугольников» предлагалось ввести скалярное произведение векторов для упрощения изучения метрических соотношений. В стереометрии акцент был сделан на свойства параллельных проекций с использованием формул Симпсона и принципа Кавальери для вывода формул объема фигур.

Усиливалась роль решения геометрических задач по вычислению объема и площади поверхности по собственным измерениям геометрических фигур. Также в течение всего срока обучения было осуществлено планирование лабораторных и практических работ [139].

Учебный предмет «Тригонометрия» не выделялся в отдельный курс, он был упразднен и частично интегрирован в курс геометрии для 8-го класса, где рассматривались тригонометрические функции острого угла. Основная же часть данной темы переместилась в новый обобщенный курс «Алгебра и элементарные функции», который включал элементы анализа и сочетал тригонометрию с показательной и логарифмической функциями.

И.Г. Малышев обращал внимание на негативное влияние этих изменений на учебный процесс: «Стоит обратить внимание на важное нововведение – исключение тригонометрии как отдельного предмета. Это был серьезный подрыв уровня математического образования» [135, с. 20].

Таким образом, в новой программе по математике 1960 года на первый план выступал принцип связи обучения с жизнью, осуществление этого принципа достигалось овладением комплекса практических приложений изучаемых математических теорий.

В целом программа представляла собой значительное продвижение в совершенствовании школьного курса математики, однако проблемы введения элементов математического анализа и векторной алгебры не получили в ней полного решения.

Отметим, что с современной точки зрения идея о преобразовании учебного материала в практическом направлении, а также обучении обучающихся использовать полученные знания и навыки на практике, весьма актуальна. Одним из приоритетных аспектов в развитии современных школьников, отраженных во ФГОС, является формирование их функциональной грамотности. Математическая грамотность входит в состав функциональной. Соответственно, одна из приоритетных задач современного образования заключается в развитии способности обучающихся применять полученные знания и умения в жизненных ситуациях [72].

Главным и, пожалуй, наиболее радикальным преобразованием общего математического образования стал осуществленный на основе подходов западных математиков переход на теоретико-множественный подход, который пронизывал весь курс математики начиная с 4-го класса. Внедрение теории множеств в школьное обучение по математике соответствовало научным предпочтениям А.Н. Колмогорова.

В пояснительной записке к программам по математике для средней школы 1968 года А.Н. Колмогоров отмечал, что «при составлении новых программ приходилось считаться с возрастанием в современной математике и практике ее применений роли математической логики и начальных понятий теории множеств» [86, с. 6].

Однако теоретико-множественная идеология, вошедшая в данную программу, далеко не исчерпывала все изменения, которые несла в себе программа по математике 1968 года. Ученый подчеркивал, что «нельзя было обойти вниманием большую роль векторных представлений в физике и возможность очень простого построения всего курса геометрии» [177, с. 5].

Отмечалось, что «авторы программы нашли удачное сочетание индуктивных содержательных обоснований, особенно на ранних ступенях обучения, с формально-дедуктивными, которые вместе с широким использованием наглядно-графических интерпретаций должны обеспечить не только глубокое усвоение фактического материала, но и достаточное развитие логического мышления» [59, с. 82].

В данной связи следует выделить некоторые ключевые особенности данной программы:

1) Изменения в сроках и содержании начального математического обучения: обучение теперь проводилось в течение трех лет вместо четырех; курс «Математика» заменил традиционную арифметику, сосредоточившись на математике как таковой, охватывающей арифметику натуральных чисел и основные величины с элементами алгебры (с ранним внедрением буквенной символики и уравнений как основного метода решения задач) и геометрию.

Соответственно, вместе с основной школой менялась также программа для начальной школы. При этом программы по математике выстраивались с учетом преемственности. Для успешного «включения» в программу по математике учащихся 4 и 5-го классов требовались минимальные условия: «лишь беглого уменья считать, первого знакомства с возможностью записать алгоритм решения задачи в виде буквенной формулы и наглядного знакомства с простейшими геометрическими фигурами» [73, с. 10].

2) Изменения в структуре и названиях предметов в курсе математики: для 4-5 классов введен курс арифметики с элементами алгебры и геометрии под общим названием «Математика»; для 6-8-х классов – курсы алгебры и планиметрии; для 9-10-х классов – курс «Алгебра и начала анализа» вместе с систематическим курсом стереометрии.

3) Курс был построен линейно, преодолен излишний централизм, но выделялись три основных этапа изучения (4-5, 6-8, 9-10 классы), которые различались по уровню подачи материала, названиям курсов и наличию специализированных учебников; допускалось повторение некоторых тем на новом уровне.

Геометрия сохранило единое название, но также делилась на три части: 4-5-е классы – пропедевтический этап; 6-8-е классы – систематический курс планиметрии, завершающий данное направление; 9-10-е классы – систематический курс стереометрии, основанный на векторном и координатном подходах, которые освещают аксиоматическую природу геометрии. Курс геометрии был полностью перестроен, он опирался на геометрические преобразования, а в старших классах геометрия строилась на векторных представлениях. Безусловно, добавление новых элементов из математического анализа и аналитической геометрии, элементов комбинаторики и математической логики сделало новую программу перегруженной [135].

4) Из школьного курса математики были исключены архаичные темы и детали, не обладающие научной, практической или образовательной ценностью (например, алгоритм вычисления квадратного корня и подобные операции). Предлагалось удаление некоторых разделов математики, таких как тригонометрия и элементарная геометрия, а также уделение меньшего внимания арифметике [177].

5) Из разнообразия новых тем в школьный курс вводились лишь те, что имели значительное общеобразовательное значение, способствовали формированию научного мировоззрения и содействовали осознанию учащимися роли математики в науках и практической деятельности. К таким темам относились «Основы дифференциального и интегрального исчисления», «Теория вероятностей», «Системы счисления», а также некоторые сведения об ЭВМ и программировании. А.Н. Колмогоров справедливо полагал, что «в предстоящую эпоху информатизации при общении с машиной точность употребления знака – необходимое качество» [1, с. 242].

6) Предусматривалось изучение элементов высшей математики, производной, интеграла, аналитической геометрии. Помимо внедрения в школьную математику теоретико-множественного подхода были введены элементы математического анализа, математической логики, теории вероятности и статистики.

В школьном курсе появились элементы комбинаторики, теории вероятности, элементы математической логики, уделялось большое внимание работе с таблицами, а также с современной вычислительной техникой. Подчеркнем, что добавление последних разделов являлось весьма логичным в силу того, что со временем появлялась необходимость в высококвалифицированных специалистах и инженерах, способных работать с техникой ЭВМ, в которой строгость и последовательность символики выходила на первое место [1].

В качестве дополнительных, необязательных к изучению параграфов, вводились элементы комбинаторики и теории вероятностей. В новой программе особое внимание уделялось элементам теории множеств и математической логике, причем эти разделы присутствовали не просто как новый материал, но как язык, на котором излагались многие, в том числе традиционные понятия. Другие обобщающие и объединяющие математические понятия могли появляться в курсе не как исходные, а как итоги изучения, по мере накопления фактов и закономерностей, дающих повод к соответствующим обобщениям (группа, поле, линейное пространство и т. п.).

Подчеркнем, что главное изменение в новой программе – не столько структура изучения тем и их последовательности, и не изменение количества часов, выделенных на изучение темы, а изменение содержания самого курса «Арифметика». Программа 1968 года внедряла в школьный курс математики теоретико-множественный подход в обучении и начинала его внедрение с 4-го класса. Так, при изучении самой первой темы «Натуральные числа» при рассмотрении термина «число» и операций над числами происходило привлечение таких понятий, как «множество», «элемент множества», «принадлежность». Как считал А.И. Маркушевич, «некоторый минимальный запас самых общих понятий (“множество” и другие) должен “пронизывать” весь школьный курс» [144, с. 24].

И.П. Костенко, комментируя данное положение, отмечает: «Возможно ли эти “общие положения” сделать понятными для школьников?» [105, с. 216]. Исследователь задавался вопросом о смысле введения данного понятия в таком раннем возрасте. На первый взгляд, с ним трудно не согласиться, поскольку данное понятие «множество» из теории чисел вводят сразу же в 4-м классе, детям в возрасте 10-11 лет. Ученик А.Н. Колмогорова А.М. Абрамов, напротив, подтверждал, что введение элементов теории множества в новой программе было «весьма осторожным и умеренным» [1, с. 173].

Рассмотрим определение множества натуральных чисел, которое дается в учебнике «Математика» 4-го класса под редакцией А.И. Маркушевича: «Составим полный список натуральных чисел, расположенных на луче между числами 21 и 28: 22, 23, 24, 25, 26, 27. Получилось множество натуральных чисел, расположенных между числами 21 и 28. Множество чисел записывают с помощью фигурных скобок: {22, 23, 24, 25, 26, 27}» [39, с. 22].

Проанализировав данную выдержку из учебника, можно сделать вывод, что в нем данное понятие раскрывается понятным языком, на доступном примере и вполне может быть посильным для понимания ученика 4-го класса.

В целом, проанализировав изменения в курсе «Арифметика» в новой учебной программе, можно выделить следующие кардинальные изменения:

1. Внедрение элементов теории множества.

2. Изменение структуры и последовательности изучения тем.

3. Увеличение времени на изучения центральных тем в курсе как следствие увеличения срока изучения предмета «Арифметика».

Курс «Арифметика» по новой программе изменился как структурно, так и содержательно. Внедрение элементов теории множества, действительно, было произведено весьма аккуратно, что является положительной стороной нового курса «Арифметика». Но при этом целесообразность внедрения теоретико-множественного подхода в младших классах вызывает определенные сомнения.

Кроме того, полагать, что данный подход действительно закладывал у учеников более крепкую теоретическую базу знаний, по нашему мнению, весьма субъективно. Тем не менее, увеличение внимания в учебном плане на центральные темы, как ранее отмечалось, также является положительной чертой. В силу того, что весь курс был пронизан теоретико-множественным подходом, в курсе «Арифметика» внедрены начальные геометрические сведения. Концентризм на алгебраическом методе решения текстовых задач является слабой стороной данного курса [118].

После курса «Арифметика» у учеников начинался курс «Алгебра», по старой программе данный переход происходил во втором полугодии 6-го класса, по новой же программе алгебра начиналась с начала 6-го класса.

Как и курс «Арифметика», курс «Алгебра» претерпел существенные изменения. Количество часов, отводимое под курс «Алгебра», в 1960 году равнялось 290 часам, а в программе 1968 года данное значение равнялось 402 часам. При изучении курса «Арифметика» учащиеся, переходящие в 6-й класс, должны были уже иметь определенные знания по алгебре. В новый курс «Арифметика» перешли некоторые темы из старого курса «Алгебра», вследствие этого включение новых тем в новый курс «Алгебра» удавалось осуществить без сокращения общего числа часов на темы [177].

Программа по алгебре для восьмилетней школы, в первую очередь, характеризовалась добавлением новых тем, преимущественно в 8-м классе. Сравнивая прежнюю и новую программу, можно убедиться, что новая программа была полностью переработана, изменена последовательность и порядок тем. Тема «Пропорции, прямая и обратная пропорциональность» переместилась из старого курса «Арифметика» в новый курс «Алгебра» 6-го класса. Темы 7-го класса: «Уравнения в первой степени с одним неизвестным» и «Система уравнений первой степени с двумя неизвестными» были объединены в тему «Уравнения и системы уравнений» и перемещена в 6-й класс. Тема «Функции и графики» 8-го класса была разделена и распределена по темам 6-го класса: «Отношения, пропорции, одночлены»; «Целые выражения» и темой 7-го класса «Неравенства. Приближенные вычисления. Извлечение корней». Темы «Действия над целыми алгебраическими выражениями» (6-й класс); «Разложение многочленов на множители» (7-й класс) были объединены в тему «Целые выражения» 6-го класса.

Тема 8-го класса «Счетная (логарифмическая) линейка» была перенесена и объединена с новыми темами «Неравенства. Приближенные вычисления. Извлечение корней». Остальные темы старой программы остались без изменений и соответствовали году обучения по новой программе.

Проанализировав изменение последовательности изложения тем, можно обобщить, что большинство тем курса «Алгебра» сместились на один год и стали преподаваться раньше. Это было обусловлено доводом, что необходимо было освободить 8-й класс и конец 7-го класса для введения и изучения новых тем. Кроме того, по замыслу создателей новой программы, в силу того, что основная школа теперь начиналась с 4-го класса, то смещение некоторых тем на более ранее изучение являлось обоснованным [84].

В 7-й класс были добавлены новые темы, такие как: «Системы счисления. Арифметические устройства вычислительных машин», «Неравенства. Приближенные вычисления. Извлечение корней»; в 8-м классе были перенесены темы из старшей школы в основную: «Числовые последовательности. Арифметические и геометрические прогрессии», «Дробные показатели степени», «Показательная и логарифмическая функция».

В теме «Системы счисления. Арифметические устройства вычислительных машин» изучались: двоичная система счисления, перевод целых и дробных чисел из двоичной системы в десятичную и обратно, двоичная арифметика и двоичное сложение на двоичном сумматоре. Данные темы вводили учеников в основы аппаратного счисления на арифметическом устройстве ЭВМ [177].

Действительно, введение данной темы являлось объективной подготовкой учеников к деятельности в современных реалиях. А.Н. Колмогоров был убежден, что обучение работе на счетных машинах ЭВМ необходимо проводить еще в школьное время. Включение данной темы в школьный курс математики отвечало стремлению авторского коллектива к приведению школьного курса к современному образу науки.

В теме «Неравенства. Приближенные вычисления. Извлечение корней» происходило изучение: свойств неравенств, погрешности, приближенных вычислений, вычислений с логарифмической линейкой, извлечение квадратного корня, линейной интерполяции, а также вычислений по формуле площадей и объемов объемных фигур. Иными словами, данная тема была направлена на развитие вычислительных навыков у учащихся. Знакомство с двоичной системой предоставляло еще одну возможность показать для учеников эффективный способ извлечения квадратного и кубического корня. Кроме того, данная тема должна была выработать способности учеников использовать в процессе своих вычислений данные справочных таблиц, а также умение работать со справочником [120].

В 8-м классе в курсе алгебры добавлялись новые темы из старшей школы: «Числовые последовательности. Арифметические и геометрические прогрессии», «Дробные показатели степени», «Показательная и логарифмическая функция». Введение данных тем в 8-й класс вызвало много споров, в объяснительной записке программы это обосновывалось, что введение данных тем являло законченное представление по теме «Функция». Кроме того, создатели новой программы аргументировали введение в восьмилетнюю школу тем, что знакомство учеников с логарифмическими графиками функций открывало возможность широкой практики по математической обработке эмпирических данных из любых разделов естествознания и общественных наук [121].

Значимость включения логарифмов и логарифмической функции в школьный курс подчеркивал А.Н. Колмогоров: «Включение в программу восьмилетней школы логарифмов и начального знакомства с логарифмическими вычислениями имеет, конечно, и практическую ценность» [91, с. 54]. Однако А.М. Абрамов считал, что «Логарифмы, тригонометрические уравнения и неравенства как элемент общего образования не нужны» [1, с. 380]. Стоит также отметить, что некоторые ученые в то время были против внедрения логарифмических и показательных функций и считали, что «в VIII классе трудно изучать показательную и логарифмическую функции, и рекомендовали изучение этих функций перенести в IX класс (Ф. Маликов, Н.А. Михайлов, В.А. Фалько и Л.В. Юсухно)» [153, с. 22].

В результате дискуссии данная тема получила определенное упрощение, как отмечал А.Н. Колмогоров: «Упрощение изложения темы “Дробные показатели степени, показательная функция и логарифмы” было достигнуто в поисках компромисса между желанием большинства членов комиссии иметь показательную функцию и логарифмы в VIII классе и бурно выражавшимися в учительской среде сомнениями в осуществимости этого желания» [84, с. 11]. В силу этого, материал впоследствии был упрощен до сведений, необходимых для использования логарифмических таблиц. И.П. Костенко так комментировал данное упрощение: «Вот как кромсалась традиционная методическая система обучения» [105, с. 228].

Таким образом, курс алгебры восьмилетней школы претерпел следующие изменения:

1) Увеличение количества часов по отдельным темам, при этом без сокращения часов по другим темам.

2) Изменение структуры изучения тем.

3) Введение новых тем.

В целом, при составлении нового курса алгебры авторский коллектив А.И. Маркушевича предполагал, что данные изменения:

1) Поднимут логический уровень изложения материала, опираясь на введение элементов логики с использованием соответствующей символики.

2) Увеличат внимание к развитию вычислительных навыков (приближенные вычисления; умение использовать таблицы).

3) Ограничат по сравнению со сложившейся традицией требования к выполнению искусственных сложных преобразований;

4) Установят более жесткие требования в отношении безошибочного выполнения элементарных преобразований.

Изменение структуры и перенос тем на более ранюю стадию изучения необходимо было сделать, предварительно переработав материал, поскольку решение освободить 8-й класс механическим переносом тем на 7-й не являлось рациональным с точки зрения обучения. Кроме того, перенос из старших классов тем, связанных с логарифмической и показательной функцией, по мнению редакторов программы, также должен быть упрощенным, став понятными для восьмиклассников. При этом упрощение противоречило идее повышения теоретического уровня знаний учеников, что ставило под вопрос внедрение данных тем в 8-й класс [105].

Курс «Геометрия» восьмилетней школы также претерпел изменения, в программе 1960 года геометрия начиналась с 6-го класса как самостоятельная дисциплина. В новой программе 1968 года материал из геометрии начинался с 4-го класса, интегрируясь в курс «Арифметика». Геометрия сформировалась как отдельный учебный предмет с 6-го класса. В целом, общий курс геометрии в программе восьмилетней школы 1960 года насчитывал 253 часа, а по новой программе 1968 года насчитывалось уже 293 часа.

Как и в курсе «Арифметика» и «Алгебра», в курсе «Геометрия» также была изменена последовательность и структура изложения материала. Сравнивая учебные программы по геометрии, которая включалась в арифметику и начиналась с 4-го класса, можно заметить, что срок изучения данного курса был увеличен, что позволяло добавить новые темы. Тема «Основные понятия» с 6-го класса была перенесена в 4-й; «Треугольники» с 6-го класса перенесены в 5-й класс в тему «Геометрические построения»; «Площадь многоугольника» с 7-го класса перенесена в 5-й; «Параллельность» и «Четырехугольники» перенесены в 6-й класс и объединены с темой «Параллельность и перпендикулярность. Осевая и центральная симметрия». Тема «Пропорциональные отрезки. Подобные фигуры» с 8-го класса перенесена в 7-й [177].

Стоит отметить, что новая программа была несколько облегчена по сравнению с программой 1960 года. Так, предполагалось не требовать от учащихся изложения доказательств признаков равенства треугольников, ограничиваясь констатацией факта и ссылкой на однозначность соответствующих построений; не входили в новую программу теоремы о метрических соотношениях в круге, о точках пересечения медиан и высот треугольника, о вписанных и описанных четырехугольниках, сегменте, вмещающем данный угол, формулы Герона (многие из исключенных теорем появились в курсе в качестве «Задач на доказательство»).

Вместе с тем, в программе 1968 года были добавлены новые темы: «Параллельный перенос»; «Окружность и поворот»; «Движения». Так, в курсе «Геометрия» появился новый раздел, связанный с геометрическими преобразованиями или движением геометрических фигур. При этом овладение понятиями, относящимися к данному разделу, разделялось на несколько этапов. В 4-5-х классах использовался экспериментальный подход к геометрическим преобразованиям: при изучении осевой симметрии использовались перегибание листа бумаги, а при первом ознакомлении с центральной симметрией и поворотом – вращение фигуры, закрепленной булавкой [195].

В теме «Параллельность и перпендикулярность. Осевая и центральная симметрии» в 6-м классе устанавливались основные свойства симметрии, частично уже известные учащимся из курса 4–5 классов. В последней теме 6-го класса рассматривался параллельный перенос. Поворот появлялся в первой теме 7-го класса, а после сопоставлялись все виды движения. В теме «Пропорциональность отрезков. Подобие фигур» изучались преобразование подобия, а также центральная гомотетия.

Одной из первых тем в курсе «Геометрия» являлась тема «Признаки равенства треугольников». Первый признак равенства треугольников, который лежит в основе многих теорем, доказывался с помощью «наложения» одного треугольника на другой. Методика преподавания данной темы предполагала, что ученики смогут физически наложить два вырезанных треугольника друг на друга и совместить, тем самым доказывая их равенство.

Но в данной теме большую роль занимал сам процесс «наложения», если посмотреть с научной точки зрения, то такой операции, как «наложение», в геометрии не существует. Операция «наложение» с точки зрения ребенка понятна, он может физически наложить вырезанные из бумаги фигурки. Если фигурки полностью совпадут, то треугольники равны, а если нет, то треугольники не равны [107].

Единственным близким к операции «наложение» является параллельный перенос, который служит одним из видов геометрических преобразований, но данная тема изучалась уже после темы «Признаки равенства треугольников». Если судить о строгости доказательства, то и параллельный перенос являлся бы доказательством частного случая расположения двух треугольников, в полной мере заменить операцию «наложение» могла лишь скользящая симметрия (комбинация параллельного переноса и поворота). Чтобы выйти из данного положения, А.Н. Колмогоров разработал специальную аксиоматику, по которой строились свойства движения: «В школьном курсе следует явно формулировать в виде аксиом основные свойства движений» [79, с. 25].

Но стоит подчеркнуть, что, как отмечалось в объяснительной записке, формулировка признаков равенства треугольников по данной программе принималась без доказательства. Тем не менее, геометрические преобразования являлись одной из центральных идей курса «Геометрия». Предполагалось, что использование свойств геометрических преобразований открыло дополнительные возможности для решения задач на доказательство и построение.

Одним из основных способов доказательства теорем по геометрии стал метод геометрических преобразований. А.Н. Колмогоров полагал также важным «ознакомить школьников уже в этом возрасте с геометрическими преобразованиями при условии, что изложению будет придан наглядный характер» [1, с. 176]. Так, с помощью геометрических преобразований авторы вводили понятие «подобие фигур», доказывали свойства параллелограмма, также другие понятия и их свойства. Кроме того, авторы аргументировали введение данной темы тем, что геометрические преобразования являлись аналогом функциональной зависимости, тем самым сокращая разрыв между геометрией и алгеброй.

Помимо внедрения новых тем в курс «Геометрия», в ней поменялась не только структура и последовательность изучаемых тем, но и содержание уже имеющихся тем из программы 1960 года. Как и с курсом «Арифметика», геометрия тоже была «пронизана» теоретико-множественным подходом. Были пересмотрены основные понятия, трактовки многих теорем, а также и их способы доказательства. Большое обсуждение вызвало определение понятия «геометрическая фигура», так, в учебнике А.Н. Колмогорова, А.Ф. Семеновича, Р.С. Черкасова давалось следующее понятие: «Геометрической фигурой называется любое множество точек» [80, с. 6]. Чтобы показать позицию критиков по данному понятию, приведем определение, которое давалось в учебнике А.П. Киселева 1962 года: «Совокупность каких бы то ни было точек, линий, поверхностей или тел, расположенных известным образом в пространстве, называется вообще геометрической фигурой» [77, с. 4].

Сравнивая данные определения, можно сделать вывод, что первое определение является более лаконичным, точным и строгим. Вспоминая определение «множества», которое давалось в курсе «Арифметика», можно сделать субъективный вывод, что данное определение не является сложным. Определение по учебнику Киселева, напротив, достаточно расплывчато, но и оно давало ученику понимание данного понятия.

Большой критике подверглось понятие «конгруэнтности», которое, по сути, заменило понятие «равенства» фигур. Поскольку курс «Геометрия» был пронизан теоретико-множественным подходом, а также одним из основных методов доказательства являлись геометрические преобразования, то внедрение термина «конгруэнтность» было уместно. Термин «равенство» в основном применим к числовым значениям, а именно к равенству определенных параметров (равенство градусной величины, равенство длины, равенство площади и т. д.), а термин «конгруэнтность» применим уже к геометрическим фигурам, которые получены с помощью движения (геометрического преобразования) и имеют одинаковую форму и размеры [79].

С точки зрения научности, термин «конгруэнтность» более правильный и точный, но не нужно забывать, что с данным термином ученики знакомились в 5-м классе. Большинство критиков акцентировали свое внимание именно на этом понятии, так Ю.М. Колягин иронично подчеркивал сложность понимания данного термина: «Школьники с большим трудом учились выговаривать это слово. Но зато как научно они выражались!» [93, с. 228]

Охарактеризованное внедрение новых тем и понятий в курс геометрии было обусловлено стратегической целью программы 1968 года – повышением научно-теоретического уровня школьного курса математики. Как и с другими нововведениями, были те, кто поддерживал изменение учебной программы геометрии. А.И. Маркушевич считал, что введение данных тем положительно скажется на развитии учащихся: «Они являются важным средством развития пространственных представлений школьников» [144, с. 146].

Вместе с тем, многие педагоги математики в то время критиковали, в частности, и введение геометрических преобразований, поскольку считали, что движение и геометрические преобразования являлись слишком абстрактными понятиями, которые плохо усваивались учениками. Так, например, П.К. Антонов призывал «не вводить движение как геометрические преобразования» [153, с. 23].

И.П. Костенко, ссылаясь на отзывы преподавателей Новочеркасского политехнического института, подкреплял их мнением свои выводы о плохом усвоении данной темы: «Геометрические преобразования твердо усвоили примерно треть поступивших» [105, с. 244].

Итак, в целом в учебной программе геометрии 1968 года, по сравнению с программой 1960 года, произошли следующие изменения:

1) Введен теоретико-множественный подход в изложение тем.
2) Введены новые темы, связанные с геометрическими преобразованиями.
3) Изменен порядок и последовательность изложения тематического каркаса курса «Геометрия».
4) Сокращены архаичные темы из курса «Геометрия».

Рассмотрев сравнение учебных программ по математике 1960 и 1968 года и произведя сравнительную аналитику, можно в целом охарактеризовать процесс модернизации школьной программы по математике 1968 года. Курс «Арифметика» был преобразован в сочетание сразу трех дисциплин: арифметика, геометрия, алгебра. Были сделаны важные изменения, но в силу отсутствия методики обучения данным нововведениям не все изменения были успешными. И.П. Костенко так критиковал сложившийся предмет: «Цельный предмет «арифметик» превратился в винегрет» [105, с. 227].

Однако все инновационные изменения в программе поддерживались результатами экспериментального внедрения программы. В 1968 году около 300 школ работали экспериментально по данной программе и учебнику авторского коллектива под редакцией А.И. Маркушевича. По мнению учителей математики – участников эксперимента, новая программа обеспечивала более высокий теоретический уровень изучения материала, способствовала развитию мышления учащихся, преодолевала разрыв между арифметикой, алгеброй и геометрией. При этом «абсолютное большинство преподавателей отмечали доступность новой программы и учебника по математике для учеников 4-го класса, указывали, что усвоение и обучение курса таким образом становится проще и нагляднее для учеников». Также в пример ставилась более высокая успеваемость учеников, участвующих в данном эксперименте [35, с. 84].

Приводя эти существенные для поддержки эффективности реформы положения, отметим, что несмотря на отдельные попытки внедрить теоретико-множественный метод в начальное математическое образование, эти инициативы оставались ограниченными локальными экспериментами и не нашли своего широкого применения в массовых школах. Доказательством служит тот факт, что новый учебник по математике под редакцией А.И. Маркушевича так и не был подготовлен для всех классов начальной школы. В результате обновления в курсе математического образования свелись лишь к интеграции элементарной алгебры и геометрии, таких как изучение простейших уравнений. Тем не менее, и от этих изменений довольно быстро отказались, что свидетельствует о сложности внедрения новых подходов в современную школьную практику [145].

В целом программа по математике для средней школы 1968 года содержала слишком много недочетов, главный из которых – отсутствие учета возрастных особенностей учащихся. В данной программе сложные и центральные темы были смещены на более ранний этап изучения, чем в программе 1960 года. Данное изменение непосредственно влияло на степень овладения и формирования определенных пропедевтических навыков, в том числе и вычислительных. Программа 1968 года являлась экспериментальным вариантом новой учебной программы.

Также подчеркнем, что характеризуемая реформа явно не учитывала психологические и возрастные особенности детского восприятия. Излишняя перегруженность программы, изучение сложных тем в раннем возрасте ребенка, неподготовленность педагогических кадров, непроработанность методической системы обучения и отсутствие опыта учителей – все это вызывало закономерную критику данных преобразований.

2.2 Сравнительно-сопоставительный анализ программ общего математического образования в 1970–1980 годы

2.2.1 Программа общего математического образования 1970–1971 годов

В 1970 году появилась новая программа общего математического образования, которая кардинально поменяла действующую систему обучения математике. Новая программа должна была модернизировать действующую математическую подготовку обучающихся, а также повысить ее уровень.

Стоит также отметить, что рассмотренная программа по математике 1968 года, которая была одобрена Министерством просвещения СССР, в течение последующего десятилетия постепенно подвергалась изменениям и корректировкам. Был распланирован план внедрения данной программы сразу на семь лет вперед, в начале, в 1970/1971 учебном году, на новую программу должны были перейти 4-е классы. Также планировалось, что в течение данной семилетки будут написаны и апробированы учебники, учебные пособия и другие методические материалы, которые помогут и ученикам, и учителям освоить новую программу по математике. В 1971 году некоторые замечания и недостатки данной программы по математике 1968 года были доработаны, при этом многие сильные и слабые ее стороны перешли уже в новую [93].

Примерно через год, после утверждения данного учебного плана по математике, в него были внесены важные изменения. Тему «Отрицательные числа» перенесли на 5-й класс, а также тема «Логарифмические и показательные функции» была упрощена. Таким образом, в 1971 году появился доработанный учебный план по математике для курса «Арифметика и начала алгебры» 4-5-го класса (таблица 4) [175].

Таблица 4 – Учебный план по математике 4-5-го класса 1971 года

Название темы	Количество часов
4 класс Арифметика и начала алгебры (7 часов в неделю; всего 245 часов, из них 30 часов геометрии)	
1. Многозначные числа	35
2. Натуральные числа	105
3. Десятичные дроби	75
«Геометрия» (30 часов распределены в течение учебного года)	
1. Основные геометрические понятия	30
5 класс Арифметика и начала алгебры (6 часов в неделю; всего 210 часов, из них 35 часов на геометрию)	
1. Положительные и отрицательные числа	70
2. Обыкновенные дроби. Действия с обыкновенными и десятичными дробями	105
«Геометрия» (35 часов распределены в течение учебного года)	
1. Геометрические построения	35

Отличительной чертой уже новой программы по математике 1971 года от программы по математике 1968 года являлось то, что в 4-м классе на курс «Арифметика и начала алгебры» отводилось семь часов в неделю, а не шесть, как планировалось. Данное изменение связано с добавлением темы «Многозначные числа», на ее изучение было выделено дополнительно 35 часов. В данной теме рассматривались те вопросы новой программы 1–3 классов, которые не содержались в старой программе этих же классов [175; 177].

Особое внимание уделялось более трудным случаям умножения и деления многозначных чисел в пределах миллиарда, порядку выполнения действий, понятию о площади и единицах ее измерения. Предполагалось, что когда в 4-й класс придут учащиеся, прошедшие курс обучения в 1–3 классах по новой программе, тема «Многозначные числа» будет снята, и на изучение математики будет отведено в соответствии с типовым учебным планом шесть недельных часов.

Кроме того, заметно, что по сравнению с программой 1968 года, в данной программе на тему «Натуральные числа» отводилось на 20 часов больше, а также увеличилось на 25 часов время на тему «Десятичные числа». Увеличение часов в программе связано с тем, что авторы программы хотели добиться лучшего усвоения навыков в решении задач с помощью составления уравнений, поэтому увеличили количество часов на ключевые темы, чтобы ученики лучше отточили свои вычислительные навыки.

По итогам первого года внедрения данной программы выявились следующие недостатки:

1) Неумение учащихся достаточно полно аргументировать свои выводы, умозаключения, особенно при обосновании зависимостей между данными и результатами арифметических действий; возникали затруднения в формулировках законов действий, а также происходило недостаточное усвоение геометрического материала.

2) Слабый уровень освоения учащимися вычислительных навыков в действиях не только с целыми числами, но и с десятичными дробями; затруднения

учащихся в упражнениях, которые требуют применения рациональных приемов вычислений.

Чтобы преодолеть данные недостатки, авторы программы увеличили количество часов на основных темах, сократив время на изучение темы «Отрицательные числа». Остальные темы остались без изменения.

Более подробно рассмотрим содержание программы общего математического образования, и то, как именно был сформирован материал с помощью теоретико-множественного подхода.

4 класс. Математика

Система обучения в 4-м классе по новой программе обеспечивалась не только одним учебником: «Математика. 4 класс», Н.Я. Виленкин, К.И. Нешков, С.И. Шварцбурд, А.Д. Семушин, А.С. Чесноков, Т.Ф. Нечаева, под редакцией А.И. Маркушевича. Также она дополнялась двумя пособиями: «Математика в IV классе. В помощь учителю», Н.Я. Виленкин, К.И. Нешков, А.Д. Семушин, А.С. Чесноков, В.Н. Рудницкая, С.И. Шварцбурд, под редакцией А.И. Маркушевича; «Дидактические материалы по математике для IV класса (самостоятельные и контрольные работы)», А.С. Чесноков, К.И. Нешков, С.И. Шварцбурд [42; 95].

Отметим, что в 1970/1971 году учебник выпускался уже в 3-м издании, так как в 1971 году курс «Арифметика и начала алгебры» был изменен. Кроме того, дополнительные пособия ранее не выпускались и появились только к 1970 году.

По заявлению авторского коллектива, данные пособия были призваны помочь учителю подготовиться в теоретическом и методическом отношении. Они тесно были связаны с новым учебником, разъясняли основные идеи новой программы и учебника, давали основные методические пояснения и необходимый учителю дополнительный учебный материал.

Программа по математике для 4-го класса содержала много вопросов и понятий, ранее изучавшихся на более позднем этапе обучения. Некоторые вопросы, например, связанные с понятием множества, вообще до этого не изучались в школе.

Вследствие этого, по новой программе было изменено соотношение индуктивного и дедуктивного подходов изложения информации. В ходе изложения материала по математике происходило постепенное вытеснение индуктивного метода изложения дедуктивным. Так как дедуктивный метод изложения материала, по мнению авторов, для 4-го класса являлся бы неэффективным, по новой программе изучение материала сводилось к индуктивному методу, подходу к общим понятиям через примеры.

Отсюда следует то, что по новой программе и по новым учебникам происходило значительное сокращение формулировок ученикам для заучивания. Во многих случаях по новой программе математические понятия раскрывались через систему упражнений, связанных с этим понятием. Как отмечали сами авторы: «Научно обоснованные ответы на эти вопросы совершенно недоступны пониманию школьников IV класса, да и старшеклассников» [45, с. 41]. В данной связи возникло некоторое противоречие между стремлением авторов к повышению научного изложения материла и пониманием его учениками. Если ученики не способны были понять научные обоснования вводимых понятий, то нивелировался сам смысл введения данных понятий.

Стоит отметить, что понятия, изученные в 4-м классе на наглядно-образных примерах, приобретали научное обоснование и строгость в более старших классах. Без того перегруженная программа включала материал, который получал научное повторение в будущем: «Программа построена таким образом, что почти на каждом уроке приходилось давать новый материал» [45, с. 38].

По нашему мнению, не имело смысла нагружать учеников понятиями, которые получат научное обоснование в более старших классах. Их изучение должно было соответствовать их возрастному уровню, чтобы ученики были готовы к дедуктивному восприятию материала. С помощью индуктивного метода изложения материала ученики получали представление о математических понятиях, но данные представления никак не были связаны с научностью. Тем более, интуитивное восприятие некоторых понятий из теории множеств не повышало математическую подготовку учеников.

Перегруженная программа негативно влияла на усвоение материала учениками. Кроме того, индуктивный метод изучения материала требовал от учителя особой подготовки к уроку: «Подготовка к таким урокам требует от учителя значительных усилий и затрат времени» [204, с. 48]. Вследствие этого к подобным изменениям не были готовы не только ученики, но и учителя: «Выпускники педагогических институтов не готовы к работе по новым программам» [204, с. 50].

Рассмотрим новые понятия из теоретико-множественного подхода, которые были внедрены в 4-м классе по новой программе: «множество», «пустое множество», «элемент множества», «отрезок», «луч», «длина отрезка», «конгруэнтность фигур», «знаки $\in$ и $\notin$».

Понятие «множество» воспринималось учениками на интуитивном уровне, при этом никак не повышало их логического мышления. «Множество натуральных чисел, расположенных между числами 21 и 22, не содержит ни одного числа. Такое множество называется пустым множеством. Пустое множество обозначается знаком $\emptyset$» [39, с. 21].

Представленное определение также вводилось на конкретном примере, которого достаточно для понимания понятия «пустое множество». Учащиеся знакомились с его символикой, которая не имела своего дальнейшего применения в 4-м классе. «Две точки A и B можно соединить различными ломаными линиями и лишь одним отрезком AB. Отрезок AB имеет наименьшую длину среди всех линий, соединяющих точки A и B. Его обозначают [AB]» [39, с. 8].

Понятие «отрезок» не являлось новым для учащихся. Оно, как и понятия «прямая», «луч», являлось интуитивно понятным для учеников, начиная с младшего возраста. Обозначение же отрезка «[AB]» вводилось без обоснования, не раскрывалась суть использования квадратных скобок. В определении отрезка не использовалось понятие «множество», авторы вводили зачем-то обозначение отрезка, но при этом с помощью теоретико-множественного подхода не раскрыли его сути, а также самого понятия «отрезка» через призму теории множества.

Безусловно, трактовка понятия «отрезок» с научной стороны была бы не воспринимаемой для учеников 4-го класса, тогда возникает противоречие о целесообразности в принципе вводить подобную математическую символику в данное определение.

«Длину отрезка АВ обозначают |АВ|» [39, с. 9].

Аналогичная ситуация происходила в обосновании обозначения длины отрезка. Авторы опускали и игнорировали понятие «модуль», а догматично вводили данную символику. Идентично определению и обозначению отрезка, авторы вводили обозначения прямой и луча. В итоги ученики не понимали разницы между круглыми и квадратными скобками в обозначении отрезков и прямых.

По нашему мнению, если авторы в силу возрастных особенностей обучаемых не могли раскрыть и обосновать суть обозначений, то не было необходимости их вводить в 4-м классе. «В геометрии две фигуры, которые могут совпасть при наложении одна на другую, называют конгруэнтными. Это значит, что такие фигуры равны по размерам» [39, с. 28]. В данном определении не отражается разницы между равными и конгруэнтными фигурами. Учитывая, что курс геометрии построен на геометрических преобразованиях, термин «наложение», используемый в определении, противоречит с научным построением курса, основанного на данном принципе.

Кроме новых понятий, которые вводились с помощью теоретико-множественного подхода, были преобразованы уже знакомые понятия «уравнения»; «неравенства» и другие. «Множеством натуральных решений неравенства $5 < x < 10$ является $\{6, 7, 8, 9\}$» [39, с. 62].

Аналогичная ситуация прослеживалась с понятиями «уравнение»; «неравенство». К привычной системе решения уравнений и двойных неравенств добавлялась символика числовых множеств. Например, ответом уравнения $(x-3)(x-2)=0$ являлись корни: $x_1 = 3; x_2 = 2$. По новой программе данные корни записывались как множество чисел 2 и 3: $\{2, 3\}$. Но данный случай единичный в программе 4-го класса, во всех остальных случаях рассматривались линейные уравнения, в которых подобная символика не использовалась. Например, корень уравнения: $5x = 3x + 4$, как и ранее, записывался как $x = 2$, что также вызывает противоречие с внедрением символики «$\in$» и «$\notin$», когда можно было записать ответ данного уравнения: $x \in \{2\}$, рассматривая его как переменную, принадлежащую множеству с единичным элементом.

При анализе программы математического образования за 4-й класс можно обнаружить элементы и термины из теории множеств. Данные понятия раскрывались на конкретных примерах, которые приводили к пониманию сути изучаемых понятий. «Научности» данные определения не несли, поэтому введение элементов теоретико-множественного подхода в 4-м классе является неоправданным. Понятия вводились безосновательно, причем в рамках одного-двух параграфов, а также находили свое отражение в нескольких задачах на повторение.

Внедрение теоретико-множественного подхода только нагружало программу 4-го класса, при этом никак не повышая научности теоретического материала. Данные термины существовали формально, обогащая лишь словарный запас учеников, при этом не раскрывая логической взаимосвязи понятий, а также отсутствовали попытки их обоснования [93].

Основной материал излагался с помощью индуктивного метода. Так, например, свойства арифметических действий, основные тождества также доказывались с помощью конкретных примеров и обобщались для всех остальных случаев: «все тождества “проверяются” индуктивно» [44, стр. 7].

5 класс. Математика

Система обучения в 5-м классе так же, как и в 4-м, обеспечивалась учебником и двумя пособиями: методическими рекомендациями для учителя и дидактическими материалами того же авторского коллектива.

Подход и изложение материала в 5-м классе являлся продолжением 4-го класса. Причем авторы подчеркивали, что курс 5-го класса построен «в предположении, что материал IV класса прочно усвоен учащимися» [43, с. 35]. Данное предположение авторов являлось также весьма сомнительным, так как неоднократно отмечалось как учителями, так и родителями, что данная программа перегружена.

Геометрический материал был выделен в учебнике для 5-го класса в отдельную главу, в отличие от 4-го класса, в котором темы по геометрии были равномерно распределены в течение всего учебного года.

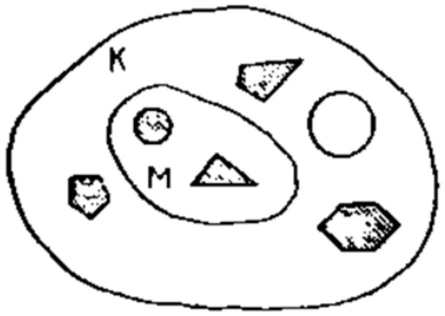
Изложение материала в большинстве случаев происходило при помощи индуктивного метода, но в отличие от 4-го класса, добавлялись некоторые элементы дедуктивного метода. Иными словами, в 5-м классе некоторые свойства имели свое математическое доказательство и обоснование, что в свою очередь действительно повышало «научность» изложения материала [175].

К таким свойствам относились: свойства делимости суммы, свойства делимости произведения, признак делимости на 2 и на 5, признак делимости на 3. Стоит отметить, что теоретико-множественный подход не использовался в доказательстве данных свойств. Доказательства были основаны на синтетическом методе обоснования, то есть логические рассуждения двигались от условия к его заключению.

Теоретико-множественный подход, как и в 4-м классе, был также вплетен в изложение материала. В 5-м классе добавлялись новые понятия из теории множеств, а также с их помощью изучался материал, существовавший в прошлой учебной программе.

Рассмотрим новые понятия из теоретико-множественного подхода, которые были внедрены в 5-м классе по новой программе: «подмножества», «пересечение и объединение множеств». Проанализируем определение «подмножество», которое дается в учебнике в 5-м классе (рисунок 5).

Множество *K* (рис. 20) состоит из окружности, круга, треугольника, четырёхугольника, пятиугольника и шестиугольника,



а множество *M*—из круга и треугольника. Каждый элемент множества *M* принадлежит также и множеству *K*. Говорят, что множество *M* есть подмножество множества *K*. Записывают это так: $M \subset K$. Запись $M \subset K$ читают: *M* есть подмножество *K*.

Рис. 20.

Рисунок 5 – определение «подмножество»

Определение «подмножество» строилось на конкретном иллюстративном примере. Суть понятия доносилась до понимания учеников так же, как и в предыдущем классе, на индуктивном подходе. Кроме того, вводилась новая символика обозначения подмножества, входящая в другое множество. Данное определение понятия «подмножество» нельзя назвать «научным», но его суть понятна на интуитивном уровне. Подмножество вводилось в курс 5-го класса, но при этом в данном курсе последующий материал на него не опирался, что ставит под сомнение внедрение понятия «подмножество» на данном этапе обучения. «Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из их общих элементов. Для обозначения пересечения множеств используют знак ∩» [40, с. 93].

Аналогичное определение имело и понятие «объединение множеств». Данное определение было лаконично сформулировано, имело достаточный уровень «научности», который был доступен пониманию учеников. Данные понятия вводились в курс 5-го класса, чтобы раскрыть другие понятия, такие как «общие делители», «НОК» и «НОД». «Пусть А – множество делителей числа 48, а В – множество делителей числа 36: А = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48); В = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}. Общими делителями чисел 48 и 36 являются числа: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Наибольшее среди них – число 12. Его называют наибольшим общим делителем чисел 48 и 36 и обозначают D (48, 36)» [40, с. 96].

Определение «НОК» имело аналогичную формулировку, но с добавлением понятия «пересечение множества». Рассматривая данное определение, можно увидеть, что оно раскрывалось на конкретном примере. Понятия «НОК» и «НОД» опирались на определения, изученные в 4-м классе, а именно на понятия «множество» и «элементы множества». Анализируя представленное определение «НОД», можно утверждать, что оно также являлось посильным для понимания учеников, но при этом не было «научным».

Кроме этого, в программе 5-го класса в главе с геометрическими сведениями существовал параграф: «72. Построение равных фигур», что вызывало противоречие с понятием «конгруэнтность фигур», изучаемым в 4-м классе. Авторы вводили данное понятие, не раскрывая разницы между определением «равные фигуры», а между прочим, в 5-м классе называли фигуры равными, если они имели равные размеры и формы. При чем в курсе 5-го класса понятие «конгруэнтность» не использовалось, что ставит под сомнение вопрос о нецелесообразности введения его в 4-м классе [40].

При анализе программы общего математического образования 5-го класса можно проследить аналогичную ситуацию в изложении материала индуктивным методом, как и в 4-м классе. В 5-м классе некоторые свойства доказывались уже дедуктивным методом, но при этом теоретико-множественный подход не повышал уровень «научности» в изложении нового материала. Доказательства, представленные в 5-м классе, не основывались на понятия из теории множества, а использовали синтетический подход обоснования.

Стоит отметить, что символика, изучаемая в предыдущем классе, использовалась на протяжении учебного года, которая при этом дополнялась. Теоретико-множественный подход в 5-м классе начал раскрывать существующие понятия по-новому, при этом теряя свою «научную» трактовку. Изложение понятий «НОК» и «НОД» с помощью теоретико-множественного подхода едва ли могло обосновать внедрение понятий из теории групп в 4-м и 5-м классах [118].

6 класс. Алгебра

В июле 1971 года Коллегия Министерства просвещения СССР утвердила рукопись учебника алгебры для 6-го класса, написанного авторским коллективом в составе Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравина, под редакцией А.И. Маркушевича в качестве общесоюзного пособия для учащихся. В это же время была утверждена программа по алгебре для 6-го класса. Учебник по алгебре для 6-го класса так же, как и учебники по математике, дополнялся двумя пособиями: для учителя и дидактическими материалами [105].

В курсе алгебры 6-го класса можно выделить три основные линии развития понятий: линия тождественных преобразований, линия уравнений и неравенств, функциональная линия. Теоретико-множественный подход также был вплетен в этот курс, на котором строились другие понятия.

Изложение материала в 6-м классе смещалось с индуктивного метода к дедуктивному. В курсе алгебры намного больше свойств и теорем имели свое логическое и математическое обоснование. В рассматриваемом курсе доказательство свойств получили основное и обратное свойство пропорциональности; свойство и его обратное свойство пропорциональных элементов; свойство и его обратное свойство обратно пропорциональных элементов; доказательство симметричности функции [124].

Кроме представленных свойств, получили свое обоснование формулы сокращенного умножения с помощью элементарных тождественных преобразований. Некоторые упражнения, связанные с тождественными преобразованиями, использовали математическую символику, изученную в прошлых классах, а также понятие «множество». При этом суть понятий «тождество» и «тождественные преобразования» были представлены в традиционном варианте.

Сведения о неравенствах и уравнениях систематизировались и обобщались в курсе алгебры 6-го класса. Некоторые упражнения при решении уравнений и неравенств использовали понятие «множество». Стоит отметить, что система уравнений и ее решения формулировались как пересечение множеств решений, входящих в нее. Также при рассмотрении решения неравенств вводилось понятие числового промежутка, и только в 6-м классе объяснялся смысл квадратных скобок, которые были введены в 4-м классе. Стоит отметить, что круглые скобки в решении неравенств, обозначающие строгий знак неравенства, были заменены на «вывернутые» квадратные. Например, множество решений неравенства $x > 6$ теперь обозначалось: «$]6;\ +\infty[$» вместо традиционного обозначения $(6;\ +\infty)$.

Главным нововведением в курсе алгебры являлось изложение функциональной зависимости с помощью теоретико-множественного подхода.

«Функцией называется соответствие между множеством X и множеством Y, при котором каждому элементу множества X соответствует один, и только один, элемент множества Y» [119, с. 69].

Стоит отметить, что данное определение функции отвечало соответствующему уровню «научности», было сформулировано лаконично и точно. Оно подкреплялось определенными иллюстрациями и схемами, способствующими более прочному усвоению материала. Кроме того, важным дидактическим средством, позволяющим раскрыть содержание понятия функции, а также других понятий, как например «область определения функции», «множество значений функции», являлось использование конечных множеств.

Стоит также отметить, что концентрация курса 6-го класса сводилась в большей степени к тождественным преобразованиям и действиям с рациональными числами. Вычислительные навыки совершенствовались в процессе выполнения многочисленных упражнений: при нахождении значений выражений, при решении уравнений, при построении графиков функций.

К 6-му классу арифметический способ решения текстовых задач вытеснился алгебраическим. В 4-х и 5-х классах происходил постепенный переход от арифметического способа к методу решения с помощью составления уравнений. В 6-м классе все текстовые задачи решались с помощью составления уравнений.

Рассматривая программу общего математического образования для 6 класса, можно сделать вывод, что в программе усилился уровень научности изложения материала. Способ изложения материала в большинстве случаев носил дедуктивный метод, большинство основных свойств и теорем имели свое доказательство и обоснование. Главной особенностью курса алгебры 6-го класса явилось введение понятия «функции», основанное на теоретико-множественном подходе. Данное понятие было раскрыто на допустимом уровне «научности» с некоторыми упрощениями для лучшего понимания учениками [126].

6 класс. Геометрия

Учебник по геометрии для 6-го класса был разработан авторским коллективом в составе: А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Ф.Ф. Нагибин, Р.С. Черкасов. Согласно новой программе, изучение геометрии в средней школе складывалось из четырех ступеней: первая (1–3 классы), вторая (4–5 классы), третья (6–8 классы) и четвертая (9–10 классы) [177].

В 6–8 классах предполагалось построение систематического курса по планиметрии. Кроме того, планировалось, что после экспериментальной проверки учебников по геометрии они будут издаваться не в трех, а в одной книге, которая сопровождала бы учеников все три года обучения и давала бы возможность сознательно относиться к системе построения курса.

Как и в других разделах математики, в геометрии курса 6-го класса также был внедрен теоретико-множественный подход. Так, в учебнике для двух видов геометрических фигур – прямых и плоскостей – не давалось явного определения. Понятия «прямая» и «плоскость» были отнесены к числу основных. Свойства этих двух видов фигур характеризовались неявно при помощи аксиом. Всем остальным видам геометрических фигур давались определения, причем эти определения последовательно исходили из общей концепции, что геометрическая фигура есть множество точек [80].

К фигурам применялись уже известные школьникам понятия теории множеств: объединение множеств, пересечение множеств. Учащиеся открывали, например, что угол, меньший развернутого, есть пересечение двух полуплоскостей, а угол, больший развернутого, – объединение двух полуплоскостей. Пересечение двух полуплоскостей может быть еще и полосой. Пересечение двух полос может быть параллелограммом. Трапецию можно получить как пересечение полосы и угла.

Авторы принимали термины «отображение» и «функция» синонимами. Такой же точки зрения придерживались и авторы учебника алгебры для 6-го класса. В учебнике геометрии понятие отображения не определялось и лишь иллюстрировалось на геометрических примерах. Изометрические отображения различных точек и плоскостей назывались по новой программе движением. Понятие отображения фигуры на фигуру в 6-м классе использовалось, прежде всего, для определения конгруэнтных фигур, которое существенно отличалось от традиционного. «Если фигуру Ф можно отобразить на фигуру $Ф_1$ так, что расстояние между любыми двумя точками фигуры Ф равно расстоянию между соответствующими им точками фигуры $Ф_1$ то говорят, что фигура Ф конгруэнтна фигуре $Ф_1$» [80, с. 32].

Данное определение конгруэнтных фигур в значительной степени отличалось от определения, изложенного в 4-м классе. Причем стоит отметить, что данное определение несло достаточный уровень «научности», но при этом являлось весьма затруднительным для понимания у учеников. С помощью понятия конгруэнтности фигур строились все остальные теоремы и свойства. На основе изометрического отображения множества точек или движения доказывалось большинство материала в курсе геометрии 6-го класса.

Стоит отметить, что изложение материала в курсе геометрии сводилось в большей степени к дедуктивному методу, включая малое участие индуктивного. Введение в дедуктивный метод построения геометрии предполагало введение основных понятий, на которые опирались другие с более четкой формулировкой, а также требовало специальной аксиоматики, по которой вводились последующие теоремы, доказательства которых строились на введенных аксиом.

Почти в каждом параграфе нового учебника по геометрии присутствовало доказательство теоремы или свойства. При формулировании и доказательстве того или иного свойства или теоремы по новой учебной программе широко использовалась математическая символика отрезков, прямых, пресечения. При этом данная особенность являлась существенным недостатком новой программы:

«трудности в работе по новой программе по геометрии вызваны главным образом двумя основными причинами: неудовлетворительной подготовленностью многих учителей и серьезными недостатками учебного пособия “Геометрия 6”» [16, с. 19].

Сложным для понимания учащимися оказался материал о геометрических фигурах, величинах и числах. В параграфах нового учебника вводилось концентрированно слишком большое количество математической символики. Содержание учебного материала являлось труднодоступным для учащихся этого возраста своими формулировками, так как обучающиеся не понимали практической значимости изучаемой теории. Это происходило, потому что «не преодоленным в современных методических разработках для VI–VIII классов оказался отрыв от широкого показа практических применений математики с соответствующей активной практикой в решении задач, убедительно интересных с практической стороны» [73, с. 11]. Кроме этого, отмечалось недостаточное количество упражнений, раскрывающих содержание изучаемых понятий: «задачи в большинстве или очень простые, требующие устного ответа, или очень сложные, которые можно предложить только в классе для общего разбора» [16, с. 19].

7 класс. Алгебра

Учебник по алгебре для 7-го класса был разработан авторским коллективом: Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравин, С.Б. Суворова под ред. А.И. Маркушевича. Курс алгебры 7-го класса содержал в себе аналогичное учебно-методическое обеспечение: дидактические материалы и книга для учителя.

В курсе алгебры 7 класса четко выделялись четыре основные линии развития понятий и идей школьного курса алгебры: линия тождественных преобразований, линия уравнений и неравенств, функциональная линия и учение о числе.

Теоретико-множественный язык находил также применение при изложении некоторых тем и упражнений в новой учебной программе 7-го класса, при этом имел меньшее влияние на изложение материала, чем в предыдущем году обучения.

Так, при изучении дробных выражений вводилось понятие области определения выражения с одной переменной, как множества значений переменной, при которых данное выражение имело смысл. Также при изучении систем линейных неравенств и при решении простейших нелинейных неравенств использовались понятия «пересечение и объединение множеств» вместе с соответствующей символикой.

В связи с систематизацией сведений о числе давалось понятие о дополнении множества. Использование этого понятия позволяло более четко разъяснить учащимся структуру множества целых чисел, рациональных чисел, действительных чисел. Соотношения между множествами натуральных чисел и целых, целых и рациональных, рациональных и действительных иллюстрировались с помощью «кругов Эйлера».

Теоретико-множественный подход в 7-м классе использовался авторами весьма аккуратно, при этом не перегружая им остальной материал. В курсе алгебры 7-го класса понятие «множество» носило вспомогательный характер, так как изложение основной части материала было построено по традиционной схеме, имея небольшие отличия от прошлой учебной программы.

Курс алгебры 7-го класса начинался с повторения сведений о преобразованиях целых выражений. Вводилось понятие дробного выражения и рассматривались тождественные преобразования дробных выражений. Серьезное внимание в курсе 7-го класса уделялось выработке прочных навыков тождественных преобразований рациональных выражений. В связи с изучением квадратных корней рассматривались некоторые тождественные преобразования иррациональных выражений.

В 7-м классе продолжалось изучение неравенств и уравнений, а также решение задач путем составления уравнений. Рассматривались задачи, для решения которых требовалось составить квадратное уравнение или уравнение, содержащее дроби с переменной в знаменателе. В курсе рассматривались также примеры нелинейных неравенств, которые решались путем сведения к системам линейных неравенств или графически.

В курсе алгебры 7-го класса продолжалось развитие функциональных представлений, центрального направления модернизации курса. Вводился термин «аргумент». Давалось понятие о возрастании и убывании функции на множестве: «Функция f называется возрастающей на множестве A, если любому большему значению аргумента, принадлежащему множеству A, соответствует большее значение функции, т. е. если $x_2>x_1$, и $x_1,x_2 \in A$, то $f(x_2) > f(x_1)$» [47, с. 47].

Данное определение являлось в достаточной мере научным, но при этом труднодоступным для учеников. Сочетание математической символики из теории множеств повышало логический уровень изложения материала, но при этом вызывало определенные трудности в усвоении и понимании данного определения.

Стоит также отметить, что по сравнению с предыдущим годом обучения курс алгебры 7-го класса носил более индуктивный метод изложения материала. В учебнике было представлено меньшее количество доказательств теоретического материала, чем в 6-м классе. В учебнике 7-го класса доказывались теоремы: о почленном сложении и умножении верных числовых неравенств; о корне из произведения; о корне из дроби; Виета; формула дискриминанта. В оставшихся случаях новый материал рассматривался на конкретных примерах.

Анализируя программу по алгебре 7-го класса, можно выявить значительные отличия от курса алгебры 6-го класса. Курс 6-го класса был чрезмерно концентрирован различными тождественными преобразованиями, когда в 7-м классе пройденный материал всего лишь дополнялся. Новых понятий из теории множеств в данный учебный период не вводилось, ко всему прочему теоретико-множественный подход использовался на минимальном уровне.

Одна из задач курса алгебры 7-го класса – совершенствование вычислительной культуры учащихся. Давались первые представления о приближенных вычислениях. Вводились понятия погрешности и точности приближения. Производилась оценка значений выражений методом границ. Выполнение упражнений вычислительного характера, работа с таблицами квадратов и квадратных корней, построение и чтение графиков функций – все это определяло политехническую направленность курса.

7 класс. Геометрия

Учебник по геометрии для 7-го класса являлся продолжением курса планиметрии, заложенного в 6-м классе, разработанный тем же авторским коллективом. Как и в предыдущим году обучения, в основе изложения материала лежало учение об отображениях и преобразованиях плоскости. Стоит отметить, что в 7-м классе планировалось вводить начальные сведения из стереометрии, но данный материал был перенесен в 8-й класс [81].

В курсе 8-го класса по геометрии вводилось понятие о необходимом и достаточном условии теоремы, уже последующее построение теорем строилось на данном принципе.

В новой программе по геометрии давались теоремы, связанные с кругом и окружностью, ранее входившие в курс геометрии, но с некоторым упрощением отдельных доказательств и уточнением определений. Так, например, вводилось понятие угловой величины дуги, которое использовалось в 8-м классе при изучении тригонометрии.

Новой в новой учебной программе по геометрии для 7-го класса являлась тема «Векторы». По новой программе понятие «вектор» рассматривалось как параллельный перенос. По старой программе понятие «вектор» рассматривалось как направленный отрезок. Стоит отметить, что при рассмотрении вектора через призму отображений авторы выводили основные свойства векторной алгебры. Данное изменение подхода к определению понятия являлось более научным, но при этом оставалось достаточно сложно воспринимаемым учениками 7-го класса: «В этом сплетении слов разобраться нелегко, а главное – оно бесполезно, поскольку не может быть применено ни в физике, ни в механике, ни в других науках» [105, с. 275].

В курсе геометрии 7-го класса при решении задач была сделана замена: вместо традиционных приемов с использованием конгруэнтности треугольников использовались понятия перемещения (осевой и центральной симметрий, поворота, параллельного переноса).

Внедрение понятия «вектор» в учебную программу как частного случая перемещения также вводит новые виды отображения плоскости на себя – гомотетия и подобия. Рассмотрим определение подобных фигур: «Если фигуру Ф можно отобразить на фигуру $Ф_1$ так, что для любых точек X и Y первой фигуры отношение расстояния $| X_1Y_1 |$ между их образами к расстоянию $| XY |$ между самими точками X и Y равно одному и тому же числу $k > 0$, то говорят, что фигура $Ф_1$ подобна фигуре Ф с коэффициентом подобия k» [81, с. 92].

Объективно анализируя данную выдержку из учебника, можно точно утверждать, что данное определение было недоступным для большинства учеников. Представленное определение являлось чрезмерно сложным для понимания школьников, оно не подходило по многим параметрам к их возрастной категории. Стоит отметить, что в учебниках по геометрии А.П. Киселева (1962 года) и Н.Н. Никитина (1971 года) отдельно формулировалось определение подобных треугольников, а после определение подобных многоугольников. Для сравнения приведем определение подобных многоугольников из учебника Н.Н. Никитина, дополненного А.Н. Колмогоровым, который действовал по старой программе: «Два одноименных многоугольника называются подобными, если углы одного из них соответственно равны углам другого, а сходственные стороны многоугольников пропорциональны» [150, с. 164].

Данное определение не опиралось на теоретико-множественный подход и идею отображений, но при этом объективно являлось понятнее, в отличие от определения в учебнике А.Н. Колмогорова. Но стоит отметить, что новое определение подобных фигур охватывало не только треугольники и многоугольники, а все произвольные фигуры. Таким образом, определение по новой программе являлось универсальным для абсолютно любой фигуры на плоскости и в пространстве. В последующих параграфах авторы возвращались к традиционным определениям.

После введения понятия подобных фигур изучалось новое понятие «гомотетия», внедряемое с помощью векторов. С использованием гомотетии доказывались теоремы, выражающие признаки подобия треугольников, а также теорему Пифагору. Проанализировав курс геометрии 7-го класса по новой программе, можно заметить, что изучаемый материал перешел на более высокий уровень изложения с точки зрения научности. Основные свойства четырехугольников доказывались с помощью геометрических преобразований на плоскости. Сведения об окружности и круге были упрощены по сравнению с предыдущей учебной программой. Иными словами, курс 7-го класса являлся идейным продолжением курса планиметрии, начинавшегося с 6-го класса [89].

Главной особенностью курса геометрии 7-го класса новой программы являлось введение понятия «вектор» с помощью теоретико-множественного подхода, который внедрял основы векторной алгебры. С помощью учения об отображениях вводились такие понятия, как «подобные фигуры», «гомотетия», которые дополняли уже изученные виды движений в плоскости. Данные определения были сформированы в отрыве от учеников и их возрастных особенностей, что способствовало «механическому» запоминанию изучаемых формулировок: «Понятие гомотетии также довольно часто изучается формально» [142, с. 10].

Доказательство теорем и свойств, изучаемых в 7-м классе, основывалось на разных видах движения. С введением понятия «вектор» некоторые свойства доказывались с помощью данного понятия. Ко всему прочему, гомотетия, включающая понятие вектора, доказывала теоремы из традиционного курса геометрии по-новому, знакомя учеников с новыми инструментами доказательств геометрических утверждений [81].

8 класс. Алгебра

Учебник и вспомогательная учебно-методическая литература были разработаны тем же авторским коллективом, что и курс алгебры за 6-й и 7-й классы. По своей структуре учебник являлся аналогичным учебникам алгебры предыдущих годов обучения. В курсе 8-го класса по сравнению с предшествующими классами были увеличены порции теоретического материала. Усилена роль дедукции, однако по-прежнему достаточно широко использовался индуктивный метод. Некоторые положения, важные для построения курса, формулировались и разъяснялись на примерах, но не доказывались. В ряде случаев введению новых понятий или рассмотрению новых теорем предшествовала постановка проблемы [122].

В курс алгебры 8-го класса были перемещены темы, которые ранее по старой программе изучались в 9-х и 10-х классах (арифметическая и геометрическая прогрессии, показательная функция, десятичные логарифмы). Кроме того, получили дальнейшее развитие функциональная линия, линия уравнений и неравенств, линия тождественных преобразований.

В курсе алгебры 8-го класса была широко представлена функциональная линия. Общее представление о функциях дополнялось введением понятия функции, обратной данной. Это понятие вводилось через понятие обратного соответствия, содержание которого раскрывалось на примерах (рисунок 6) [121].

На рисунке 34 отношение p между элементами множества X и элементами множества Y задано с помощью стрелок. Поменяем направление стрелок (рис. 35); получим другое отношение — отношение q между элементами множества Y и элементами множества X.

Говорят, что q есть *отношение, обратное отношению* p. В свою очередь отношение p является обратным отношению q.

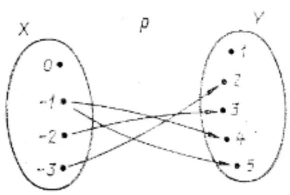


Рис. 34

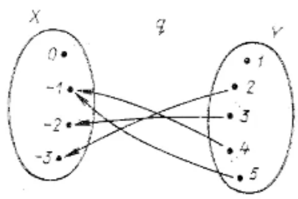


Рис. 35

Рисунок 6 – определение обратного соответствия

Данное определение вводилось с применением индуктивного метода изложения материала, основываясь на теоретико-множественном подходе. Такое раскрытие понятия не являлось научным, но можно наблюдать преемственность функциональной линии 6–8 класса. Рассматривая данное определение и последующее раскрытие обратной функции, авторы использовали модели конечных множеств, являющихся главным средством формирования вводимых понятий.

При рассмотрении показательных и логарифмических функций их свойства доказывались аналитическим способом. Внедрение понятия «обратная функция» позволило авторам ввести функции $y = \sqrt[n]{x}$ и $y = \lg x$, а также обосновать их свойства из обратных им функций $y = x^n$ и $y = 10^x$ на основе изученных теорем о взаимно-обратных функциях. Усвоению свойств функций способствовало широкое привлечение графических представлений [177].

Также одним из нововведений в курсе алгебры 8-го класса являлось введение дополнительного класса функций, который занимал особое в нем положение – это последовательности, некоторые общие сведения о которых предпосылались изучению свойств арифметической и геометрической прогрессий. Понятие последовательности определялось через понятие функции: «Функция, область определения которой – множество натуральных чисел или множество первых n натуральных чисел, называется последовательностью» [121, с. 50]. В применении к последовательностям раскрывались такие известные учащимся понятия, как график функции, монотонная функция и др. Стоит отметить, что свойства квадратичных функций использовались с помощью параллельного переноса.

В курсе 8-го класса продолжалось изучение уравнений и неравенств. Так же, как и в предыдущих учебных годах, в данном периоде теоретико-множественный подход применялся авторами при рассмотрении решений систем уравнений и неравенств второй степени с двумя неизвестными. Стоит отметить, что также рассматривались простейшие виды логарифмических и показательных уравнений и неравенств.

Линия уравнений и неравенств аналогично продолжилась и в 8-м классе. Однако введение простейших логарифмических и показательных уравнений и неравенств в качестве второстепенной темы при изучении соответствующих функций являлось нецелесообразным решением. В старшей школе продолжалось решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств на более высоком уровне с учетом того, что не все учащиеся переходили в 9-й и 10-й класс, внедрение элементов решения простейших уравнений и неравенств в 8-м классе выглядело сомнительным [177].

Развитие знаний о тождественных преобразованиях также были расширены в 8-м классе. Данные сведения были дополнены тождественными преобразованиями выражений, содержащими корни *n*-й степени, так как был добавлен материал из старшей школы о понятии корня *n*-й степени и свойства арифметического корня n-й степени (корень из произведения, дроби, корня, основное свойство корня). Причем объем таких преобразований, по сравнению со старой программой, значительно меньше. Основное внимание при изучении тождественных преобразований иррациональных выражений уделялось тождественным преобразованиям выражений с дробными показателями степени.

В связи с изучением тождественных преобразований выражений, содержащих степени с рациональными показателями, вводилось понятие тождества на множестве. Давалось определение: «Два выражения называются тождественно равными на данном множестве, если на этом множестве они имеют смысл и все их соответственные значения на этом множестве равны» [121, с. 121].

Данное определение вводилось с появлением степеней с рациональным показателем в силу того, что основание степени может быть как положительным, так и отрицательным. Уточнение «на данном множестве» подчеркивает эту особенность. С научной точки зрения замечание являлось весьма удачным, а формулировка определения с использованием понятия «множество» сконструирована лаконично.

Особое внимание уделялось совершенствованию вычислительной культуры учеников. В курсе алгебры 8-го класса продолжалось начатое в 7-м классе знакомство учащихся с теорией приближенных вычислений. Вводилось понятие относительной погрешности. Рассматривались правила сложения, вычитания, умножения и деления со строгим учетом погрешностей. Формулировались практические правила вычислений с приближенными значениями чисел. Так как в

8-м классе изучались свойства логарифмической функции, авторы решили не только познакомить учащихся с правилами вычислений с помощью логарифмической линейки, но и дать обоснование этим правилам. Навыки умножения и деления чисел с помощью логарифмической линейки, возведения в квадрат и извлечения квадратного корня, по их мнению, должны были найти применение в последующем курсе математики, а также на уроках физики, химии, труда [94].

Усиление роли в развитии вычислительных навыков являлось действительно верным направлением, так как в рамках политехнического образования развитие вычислительных навыков являлось одной из приоритетных задач. Новым разделом в курсе 8-го класса являлось введение темы «Алгоритмы и элементы программирования». В данной теме рассматривались начальные сведения об ЭВМ, а также о способах записи математических алгоритмов. Данная тема на тот период действительно «модернизировала» математику, однако в учебнике эти сведения рассматривались как дополнительный материал в рамках развития интереса у учеников: «предназначенный для проведения беседы с учащимися» [122, с. 15].

Проанализировав курс алгебры 8-го класса новой учебной программы основного общего математического образования, можно выделить основные особенности. Теоретико-множественный подход выражался в 8-м классе в основном при определении и развитии функциональной линии. Через понятие «функция» вводились арифметические и геометрические прогрессии, через понятие «обратной функции» вводилась логарифмическая функция, обратная показательной. Большинство тем, включенных в данный курс, были перенесены из 9-го и 10-го класса. Авторы обосновывали данное решение, ссылаясь на законченность изложения функциональной линии в курсе алгебры, но при этом не учитывая возрастных возможностей учеников: «При выполнении действий над степенями с рациональными показателями учащиеся часто допускали ошибки» [122, с. 22].

8 класс. Геометрия

Курс геометрии 8-го класса по новой программе был построен аналогично курсам 6–8 классов. Учебник для 8-го класса дополнялся учебным пособием для учителя и дидактическими материалами. В 8-м классе изучались четыре темы: «Повороты и тригонометрические функции»; «Метрические соотношения в треугольнике»; «Вписанные и описанные многоугольники»; «Начальные сведения из стереометрии» [177].

Заключительная часть курса планиметрии расширяла знания композициями отображений. Курс геометрии 8-го класса начинался с повторения одного из видов геометрического преобразования – поворота. Через запись координат точек, равномерно движущихся по единичной окружности, вводилось соответствие между множеством углов, образованных данными точками, с ординатой и абсциссой точки на единичной окружности. Так, с помощью геометрического преобразования учащиеся знакомились с тригонометрическими функциями. При этом изучение свойств тригонометрических функций переносилось в старшую школу.

По старой программе вопросы тригонометрии рассматривались как материал для решения геометрических задач, сводящихся к вычислению элементов прямоугольных треугольников. Содержание этой темы по новой программе опиралось на понятие перемещения, свойства окружности и некоторые сведения из курса алгебры (метод координат). Рассмотрение этой темы с помощью данного метода сокращало предметную дифференциацию. Теоретико-множественный подход раскрывался в рамках данной темы как отображение множества точек в плоскости [82].

Большое внимание уделялось практическим приложениям изученного материала, в частности задачам, приводящим к решению прямоугольных треугольников. Метрические соотношения в треугольнике (вначале прямоугольном, а затем косоугольном) выводились с использованием понятия координат вектора.

Модернизация введения тригонометрических функций с помощью геометрических преобразований значительно усложнила понимание школьниками понятий «синус» и «косинус»: «У отдельных учащихся нет четкого представления о синусе и косинусе угла как об ординате и абсциссе точки единичной окружности» [141, с. 22]. При этом введение тригонометрических функций через поворот подготавливало учащихся к отбору корней при решении тригонометрических уравнений на заданном множестве в старших классах.

В теме «Вписанные и описанные многоугольники» доказывалась теорема о вписанном угле, напоминалась уже известная учащимся теорема о том, что около всякого треугольника можно описать одну и только одну окружность, и доказывалась теорема о возможности вписать в любой треугольник единственную окружность. Затем изучались свойства вписанного и описанного четырехугольников. Рассматривались способы построения правильных многоугольников; выводились формулы для вычисления площади правильного многоугольника. В заключении главы сообщались формулы длины окружности и площади круга с краткими пояснениями.

Так, материал, связанный с кругом и окружностью, был сокращен. Не входили в программу теоремы о метрических соотношениях в круге, о точках пересечения медиан и высот треугольника, о вписанных и описанных четырехугольниках, сегменте, вмещающем данный угол. Тем не менее, незначительное сокращение теоретического материала по данной теме не избавило учебный курс геометрии от перегрузки [195].

Завершалось изучение курса темой «Начальные сведения из стереометрии», в которой учащиеся знакомились с взаимным расположением прямых и плоскостей, простейшими пространственными фигурами. Здесь же давались формулы площади поверхности и объема прямой призмы, цилиндра, правильной пирамиды, конуса и шара. В первом разделе этой главы обобщался материал, во многом уже известный учащимся из курса черчения. Основное назначение этого материала – развитие пространственных представлений учащихся, что имело большое значение не только для их общего развития, но и являлось своеобразной подготовкой восьмиклассников к изучению систематического курса стереометрии. Большое внимание при изучении этой главы уделялось решению задач на вычисление площади поверхности и объема фигур по готовым данным, а также по данным, полученным в результате измерений. По содержанию данный материал по новой программе не отличался от материала по старой программе [135].

Проанализировав содержание новой программы общего математического образования 1971 года, можно констатировать усиление степени влияния теоретико-множественного подхода на материал, а также сделать выводы о повышении научности изложения материала.

Новую программу по математике можно разделить на три курса: «Арифметика и начала алгебры» (впоследствии заменена на курс «Математика»); «Алгебра»; «Геометрия». Разработкой каждого курса занимался отдельный авторский коллектив: по математике – Н.Я. Виленкин и другие под редакцией А.И. Маркушевича; по алгебре – Ю.Н. Макарычева и другие под редакцией А.И. Маркушевича; по геометрии – А.Н. Колмогоров и другие.

Наиболее удачным курсом, на наш взгляд, являлся курс «Математика», так как в большинстве случаев весь материал получил незначительные изменения в сравнении с традиционным курсом. Курс математики в 4-м классе по содержанию материала не был серьезно изменен теоретико-множественным подходом. В него были добавлены понятия из теории множеств, которые могли быть перемещены в 5-й класс, так как понятие «множество» как инструмент теоретико-множественного подхода, с помощью которого происходило раскрытие нового материала, впервые использовалось в 5-м классе [94].

В 5-м классе понятия «НОД и НОК» вводились уже с использованием соответствующей терминологии из теории множеств. В большинстве случаев изложение материала проходило с помощью индуктивного способа, но при этом в 5-м классе начиналось доказательство теоретического материала. Введение в курс 4–5-го классов теоретико-множественного подхода являлось пропедевтической фазой перед курсами «Алгебра» и «Геометрия». Ученики знакомились с понятиями, связанными с термином «множество», и математической символикой. Повысить научность изложения материала в 4-5-м классах – нереализуемая задача, поскольку возрастные особенности учащихся и недостаточный уровень развития абстрактно-логического мышления не позволял им воспринимать материал [175].

Главным нововведением, которое повышало научность изложения материала и его модернизировало, являлось введение функциональной линии в курс «Алгебра». Понятие «функция» раскрывалось с помощью понятия «множество». Введение функциональной линии было выполнено весьма аккуратно, как и сам курс алгебры. С помощью определения «функция» вводились другие новые понятия: арифметическая и геометрическая прогрессия; логарифмы; степень с рациональным показателем [177].

При этом курс «Алгебра», по сравнению с курсом «Математика», резко получил более дедуктивный метод изложения материала. Большинство теоретического материала имело свое обоснование. В курсе «Алгебра» чаще использовалась математическая символика в определениях и теоремах, что усложняло понимание материала. Но при этом авторы смогли добиться повышения научности изложения материала.

Добавление нового материала, чтобы «придать законченность функциональной линии», значительно «уплотнило» изучение материала из традиционной программы. Вследствие этого 6-й класс был перенасыщен различными типами тождественных преобразований, а большая часть материала из 8-го класса по старой программе была «ужата» в 7-м классе.

Курс «Геометрия» являлся самым неудачным. Основной причиной такого исхода данного курса являлась непродуманность учебных пособий. Изложение теоретического материала по новой программе, действительно, подавалось на высоком научном уровне, но вследствие этого простые формулировки искажались «научным» языком, восприятие которых становилось более сложным: «Колмогоров и его коллеги забили школьный курс всякими благоглупостями, наукообразностями, словесами учеными» [38, с. 18].

Теоретико-множественный подход в курсе «Геометрия» выражался с помощью понятия «отображение», аналог понятия «функция» в курсе «Алгебра». Через отображение вводилось основное понятие «геометрическое преобразование плоскости» или «движение», с помощью которого основывалось построение всего курса. Так, теоретический материал из традиционного курса изучался по новому принципу, а программа дополнялась новыми темами.

В курс геометрии были добавлены новые темы, которые расширяли линию, связанную с движением. Также вводилось понятие «вектор», а вместе с ним – элементы векторной алгебры. Данные нововведения перегружали программу, а потребность в оптимизации курса «Геометрия» была весьма актуальной: «При соответствующем совершенствовании структуры…, а также при частичной разгрузке учебного материала имеется реальная возможность сформировать у школьников более глубокие и прочные знания по всем разделам курса» [39, с. 36].

Изложение материала в учебных пособиях по геометрии в большей степени производилось с помощью дедуктивного метода. Дедуктивный метод изложения материала был основан на построении последовательных логических цепочек, развивающих абстрактно-логическое мышление. Соответственно правильно выстроенные механизмы при изучении теоретического материала способствовали бы данному процессу, но в 6-м классе данная система была реализована неудачно: «В Колмогоровской «Геометрии, 6-8» в шестом классе … из выделенных там 38 утверждений почти две трети оставлены без доказательства» [38, с. 23].

В курсе планиметрии встречалось большое количество прямых и обратных теорем с соответствующими доказательствами, что вызывало определенные затруднения в усвоении материала: «в учебном пособии формулируются и доказываются прямая и обратная теоремы, а затем формулируется общая теорема … учащиеся затруднялись в выборе той теоремы, которую необходимо было доказывать на экзамене» [39, с. 37].

Основная критика всей реформы и учебной программы пришлась на внедрение теоретико-множественного подхода в школьный курс. Но основная проблема неудачного построения курса заключалась не в общем принципе внедрения понятия «множество», а в разработанных учебных пособиях: «изгнание слова “множество” и соответствующих теоретико-множественных атрибутов из школьного курса не оказало должного эффекта» [1, с. 216].

Содержание формулировок теоретического материала, методы и способы его изложения, система упражнений учебника и другие аспекты являлись ключевыми факторами в данной неудаче. Причиной этому было недостаточное время, выделенное на разработку учебно-методического комплекса: «необходимо было после … нового учебника для 4 класса к следующему году обязательно сдать учебник для 5 класса. Это не могло не сказываться на качестве работы» [1, с. 242].

Ко всему прочему, в сжатые сроки невозможно было обучить всех учителей преподавать по новой программе и по новому учебнику. Непродуманная система повышения квалификации учителей также являлось весомой причиной неудачи реформы: «Последствия слабой координации между вузами и школой сказались и на преподавании “новой” математики в “новой” же массовой школе» [1, с. 242].

2.2.2 Программа по математике 1979 года

В 1977 году произошел первый выпуск учеников, закончивших школу по новой программе. 22 декабря 1977 года вышло постановление Центрального комитета КПСС и Совета министров СССР «О дальнейшем совершенствовании обучения, воспитания учащихся общеобразовательных школ и подготовки их к труду», которое признавало, что учебная программа, в том числе по математике, является излишне перегруженной [190, с. 376].

Затем в декабре 1978 года Министерство просвещения СССР признало «учебную программу и школьные учебники по математике неудовлетворительными» [95, с. 90]. Министерство просвещения СССР поручило академику АН СССР А.Н. Тихонову к февралю 1979 года подготовить новую учебную программу по математике.

Создатели новой программы по математике 1979 года руководствовались следующими требованиями:

1) Отсутствие теории множеств в основе изложения математики.

2) Курс геометрии не строится на геометрических преобразованиях.

3) Отказ от чрезмерной общности при введении математических понятий и определений.

4) Сокращение до минимума количества сведений без их доказательства.

5) Сокращение математико-логических обозначений, которые учащиеся должны запоминать.

Стоит также отметить, что при подготовке данной программы математики были выделены цели и задачи подготовки, а также обозначены результаты обучения. Впервые были сформулированы требования к подготовке учащихся по математике и их планируемый результат. Кроме того, после каждой темы были определены межпредметные связи, которые присутствовали в каждой теме.

Опираясь на требования, по которым строилась новая программа по математике 1979 года, можно сделать вывод, что в какой-то степени программа возвращалась к ранее рассмотренной программе 1960 года.

Рассмотрим учебный план по математике восьмилетней школы, который был представлен в 1979 году (таблица 5) [176].

Таблица 5 – Учебный план для восьмилетней школы 1979 года

Название темы	**Количество часов**
4 класс Математика (6 часов в неделю; всего 210 часов)	
1. Натуральные числа и нуль	60
2. Простейшие геометрические фигуры	10
3. Дробные числа	112
4. Измерение геометрических фигур	20
5. Повторение	8
5 класс Математика (6 часов в неделю; всего 210 часов)	
1. Повторение	4
2. Десятичные дроби	76

Продолжение таблицы 5

3. Многоугольники. Симметричные фигуры	24
4. Рациональные числа	64
5. Простейшие алгебраические понятия	26
6. Длина окружности и площадь круга	10
7. Повторение	7
6 класс Алгебра (4 часа в неделю; всего 140 часов)	
1. Алгебраические выражения	50
2. Линейные уравнения. Линейная функция	22
3. Алгебраические дроби	40
4. Системы двух линейных уравнений	20
5. Повторение	8
Геометрия (2 часа в неделю; всего 70 часов)	
1. Простейшие геометрические фигуры на плоскости и их основные свойства	25
2. Треугольники	25
3. Прямой угол. Прямоугольные треугольники	12
4. Повторение	8
7 класс Алгебра (3 часа в неделю; всего 105 часов)	
1. Повторение	6
2. Неравенства	16
3. Приближенные вычисления	12
4. Квадратные корни	20
5. Квадратные уравнения и неравенства	46
6. Повторение	6
Геометрия (3 часа в неделю; всего 105 часов)	
1. Повторение	4
2. Осевая и центральная симметрия	14
3. Параллельные прямые	12
4. Четырехугольники	15
5. Равенство фигур. Площади многоугольников	26
6. Подобные треугольников. Теорема Пифагора	14
7. Окружность	14
8. Повторение	6

Продолжение таблицы 5

8 класс Алгебра (3 часа в неделю в первом полугодии и 4 часа в неделю во втором; всего 122 часа)	
1. Повторение	6
2. Арифметические и геометрические прогрессии	30
3. Степень с рациональным показателем	42
4. Десятичные логарифмы	12
5. Элементы вычислительной математики и программирования	12
6. Повторение	20
Геометрия (3 часа в неделю в первом полугодии и 2 часа в неделю во втором; всего 88 часов)	
1. Повторение	2
2. Векторы	20
3. Метод координат на плоскости	14
4. Тригонометрическая функция. Метрические соотношения в треугольнике	18
5. Подобие фигур	12
6. Правильные многоугольники	14
7. Повторение	8

Охарактеризуем наиболее важные изменения.

1. Курс «Арифметика и начала алгебры» был превращен в курс «Математика», который насчитывал теперь 420 часов, что и курс «Арифметика и начала алгебры» (с учетом того, что тема «Многозначные числа» убрана из курса).

2. Важные изменения произошли в структуре последовательности изложения тем. Теперь изучение ключевых тем протекали в следующем порядке: «Натуральные числа»; «Обыкновенные дроби»; «Десятичные дроби»; «Отрицательные числа». Обыкновенные дроби вновь изучались перед десятичными, причем обыкновенные дроби изучались в 4-м классе, а десятичные уже в 5-м. При решении текстовых задач больше не ставился акцент на решение их алгебраическим способом (через составление уравнения). Тем не менее, курс

«Математика» содержал начальные сведения о геометрических фигурах, как было в предыдущей программе [211].

3. Курс алгебры был сокращен, теперь он насчитывал 367 часов, что на 35 часов меньше, чем в предыдущей программе. Данный курс по некоторым темам, которые теперь считались «архаичными» и «формалистскими», был упрощен (например, тема «Приближенные вычисления»). Некоторые темы были даже исключены из курса («Вычисления с логарифмической линейкой», «Логарифмические таблицы»), чтобы ориентировать учеников на вычисления, пользуясь не таблицами, а микроэлектронными вычислительными приборами. При этом темы, связанные с двоичной системой и действиями с ними, были также исключены из основной программы, остались только общие понятия о ЭВМ [46].

4. Курс «Геометрия» также подвергся изменениям, хотя увеличился на 35 часов по сравнению с предыдущим курсом, данное изменение связано тем, что в 7-м и первом полугодии 8-го класса геометрия изучалась 3 часа в неделю, вместо 2 часов, как раньше. Геометрия подверглась изменениям как в структуре, так и в содержании. В 4-5-м классах темы из геометрии четко распределены в течение учебного года, в отличие от предыдущей программы.

Кроме того, в 6-м классе учитывался материал, пройденный в 4-5-м классах. Так, разработчики программы избавились от повторного изучения таких понятий, как «величины и числа»; «отрезки и лучи»; «координаты и точки»; «ломанная»; «угол»; «измерение углов» и т. д. Были заметно упрощены темы, связанные с параллельным переносом, гомотетией и другими видами движения, остались лишь общие понятия и положения, связанные с осевой и центральной симметрией, а также небольшие сведения о повороте [134].

Из программы 8-го класса была удалена тема, связанная с начальными сведениями стереометрии: «Вычисления площади и объемов пространственных тел». Однако была расширена тема «Векторы», а также действия с векторами.

Как следует из анализа представленной программы по математике 1979 года, в какой-то степени произошло возвращение к принципам программы по математике

1960 года. Основные объекты критики, которой программа по математике 1960 года подвергалась на протяжении второй половины 1960-х годов, были устранены. В новой программе по математике 1979 года были так же учтены ошибки, которые были допущены в предыдущей программе по математике 1968 года – была пересмотрена структура и последовательность изложения тем. Было упрощено изложение сложных тем, но в целом идейный смысл и положительные черты данной программы удалось сохранить [46].

Представленная в таблице 5 программа по математике 1979 года также со временем была подвергнута определенным изменениям.

2.2.3 Программа по математике для школ 1982 года

Коллегия Министерства просвещения СССР в 1982 году утвердила программу по математике для школ на период 1982/1983 года обучения. Рассмотрим изменения, внесенные в учебный план по математике 1982 года (таблица 6) [152].

Таблица 6 – Программа для восьмилетней школы по математике 1982 года

Название темы	**Количество часов**
4 класс Математика (6 часов в неделю; всего 204 часа)	
1. Натуральные числа	40
2. Арифметические действия над натуральными числами	50
3. Обыкновенные дроби	15
4. Десятичные дроби	80
5. Повторение	19
5 класс Математика (6 часов в неделю; всего 204 часа)	
1. Положительные и отрицательные числа	25
2. Арифметические действия над положительными и отрицательными числами	70
3. Рациональные числа	25

Продолжение таблицы 6

<table>
<tr><td colspan="2">4. Арифметические действия над рациональными числами</td><td colspan="2">65</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Решение задач. Повторение</td><td colspan="2">19</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">6 класс
Алгебра
(4 часа в неделю; всего 136)</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Основные понятия</td><td colspan="2">14</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Понятие о функции</td><td colspan="2">32</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Степень с натуральным показателем</td><td colspan="2">21</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Многочлен</td><td colspan="2">41</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Система уравнений</td><td colspan="2">18</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Решение задач. Повторение</td><td colspan="2">10</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Геометрия
(2 часа в неделю; всего 68 часов)</td></tr>
<tr><td>по учебнику Погорелова</td><td>кол-во часов</td><td>по учебнику Колмогорова</td><td>кол-во часов</td></tr>
<tr><td>1. Начальные понятия по геометрии</td><td>16</td><td>1. Начальные понятия</td><td>23</td></tr>
<tr><td>2. Равенство треугольников</td><td>21</td><td>2. Конгруэнтность фигур и перемещение</td><td>19</td></tr>
<tr><td>3. Сумма углов треугольника</td><td>13</td><td>3. Симметрия фигур</td><td>10</td></tr>
<tr><td>4. Геометрические построения</td><td>15</td><td>4. Окружность</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5. Повторение</td><td>3</td><td>5. Повторение</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">7 класс
Алгебра
(3 часа в неделю в первом полугодии и 4 часа в неделю во втором; всего 119 часов)</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Рациональные числа</td><td colspan="2">33</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Неравенства</td><td colspan="2">22</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Приближенные вычисления</td><td colspan="2">15</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Рациональные и иррациональные числа. Квадратные корни</td><td colspan="2">24</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Квадратные уравнения</td><td colspan="2">17</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Повторение</td><td colspan="2">8</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Геометрия
(3 часа в неделю в первом полугодии и 2 часа в неделю во втором; всего 85 часов)</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Параллельность и параллельный перенос</td><td colspan="2">17</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 6

2. Многоугольники	30
3. Векторы	20
4. Подобие	13
5. Повторение	5
8 класс Алгебра (4 часа в неделю; всего 136 часов)	
1. Квадратный трехчлен. Системы уравнений второй степени	26
2. Прогрессии	22
3. Степень с рациональным показателем	25
4. Десятичные логарифмы	40
5. Понятие программирования для ЭВМ	8
6. Повторение	15
Геометрия (2 часа в неделю; всего 68 часов)	
1. Теорема Пифагора	8
2. Тригонометрические функции	18
3. Метрические соотношения в треугольнике	14
4. Вписанные и описанные многоугольники	18
5. Повторение	10

Отметим важную особенность данного учебного плана – в школах происходил постепенный переход на новую программу по математике, часть школ работали по учебнику под редакцией А.Н. Колмогорова, но большинство школ в период 1982/1983 года работали по учебникам А.В. Погорелова. Так, например, в 6-м классе представлены учебные планы по геометрии по учебнику Погорелова и Колмогорова. Виден результат отказа от теоретико-множественного подхода, снят термин «конгруэнтность», понятие о движении (геометрических преобразований) давалось теперь в 6-м классе в качестве ознакомительного экскурса в теме «Геометрические построения». Дальнейшие года изучения геометрии по учебным пособиям А.В. Погорелова находились в стадии разработки [152].

Сравнивая учебные программы 1979 года и 1982 года, можно заключить, что темы и количество часов, отводимых на них в учебной программе по математике, были перераспределены. Количество учебных часов уменьшалось, это было связано с тем, что создатели программы по математике предполагали, что в конце учебного года в оставшееся время будет происходить повторение и систематизация учебного материала. В конце каждого года была определена тема «Повторение», данная тема являлась неким резервом для учителя, чтобы на какую-то тему отвести больше планируемого времени [95].

В теме «Натуральные числа» наблюдалось уменьшение количества часов на изучение данной темы, что было обусловлено переработкой курса начальной школы. Также было сокращено количество часов на решение текстовых задач с помощью уравнения, так как в 5-м классе на данную тему отводилось больше времени.

Порядок изучения тем с рациональными дробями теперь был таков: «Натуральные числа»; «Десятичные дроби»; «Положительные и отрицательные числа»; «Обыкновенные дроби». Данное изменение было аргументировано тем, что действия с десятичными дробями имеют схожие алгоритмы выполнения действий с натуральными числами [155].

Также было исключено рассмотрение сложных ситуаций с обыкновенными и десятичными дробями, что было обусловлено уменьшением часов на данные темы. В 5 и 6-м классах большое внимание уделялось решению линейных уравнений, однако в 6-м классе текстовые задачи были значительно упрощены до уровня 4-5-х классов. В теме «Прогрессии» давались сведения о прогрессиях в рамках понимания арифметической и геометрической прогрессии. Формулы суммы и разности кубов не являлись обязательными к изучению. Блок тем «Десятичные логарифмы» и «Степени с рациональными показателями» были расширены, в новой программе давалось больше времени на освоение данных тем, которые отсутствовали в программе 1960 года [152].

Осуществленный сравнительно-сопоставительный анализ учебных планов и программ по математике 1960; 1968; 1971; 1979; 1982 годов дает представление о произошедших изменениях, к которым привела реформа общего математического образования. Также сравнение программ по математике 1979 и 1982 года дает основания для вывода о результатах реализации данной реформы, а также ее влиянии на систему образования СССР.

Подводя итоги вклада А.Н. Колмогорова в совершенствование общего математического образования, можно с уверенностью утверждать, что выдающийся ученый и его авторский коллектив проделали колоссальную работу по модернизации школьного математического образования. Они полностью проработали всю структуру и содержание математического изложения материала, а также учебной программы и учебных пособий по математике. Подчеркнем, что работа по улучшению и оптимизации школьной программы по математике велась постепенно. Данные изменения рельефно видны при сравнении учебных программ по математике 1960 и 1968 годов, а также при сравнении программ по математике 1968 и 1971 годов.

В целом, осуществленная реформа общего математического образования значительно изменила структуру и содержание школьного образования.

Если обобщить изменения, произошедшие в системе общего математического образования, то можно выделить такие ключевые положения:

1) Изменение срока и содержания основного школьного образования по математике.

2) Изменение структуры и содержания школьных математических дисциплин.

3) Введение новых тем «модернизирующих» школьный курс математики.

4) Исключение «архаичных» тем из школьного курса математики.

5) Внедрение теоретико-множественного подхода в курс математики.

6) Изменение курса «Геометрия» на основе геометрических преобразований;

7) Создание факультативных занятий по математике.

Основные вопросы, которые вызывали критику, были сформулированы при обзоре учебных программ по математике. При сравнении учебных программ по математике 1979 и 1982 годов можно отрефлексировать, какие изменения были совершены после признания правомерности части критических суждений.

Действительно, школьный курс перестал строиться на теоретико-множественном подходе изложения материала, курс «Геометрия» не основывался более на геометрических преобразованиях. Итак, главные замечания были устранены, а остальные нововведения в сфере общего математического образования остались; существенно, что «сохранялись главные элементы программы по математике 1968 году» [1, с. 217].

В программу 1982 года были включены такие изменения из программы 1971 года восьмилетней школы:

1) Десятичные дроби изучаются перед обыкновенными.

2) Начальные сведения по геометрии внедрены в курс «Математика» 4-го класса.

3) Добавлены логарифмические и степенные функции («степень с рациональным показателем»; «десятичные логарифмы»).

4) Сохранение в курсе сведений о программировании и ЭВМ.

5) Сохранение сведений о геометрических преобразованиях (движение) в курсе «Геометрия».

6) Аксиоматическое построение всего курса «Геометрия».

7) Сохранение и поддержание работы факультативных занятий.

8) Сохранения срока обучения основной школы (с 4-го класса).

Существенно, что с появлением новой программы по математике 1982 года не были исключены факультативные занятия по математике. На факультативных занятиях по математике рассматривались новые вопросы из расширенного курса школьного образования.

2.3 Тенденции создания учебных пособий для общего математического образования в 1960–1970-е годы

Одним из ключевых факторов в реформировании общего математического образования в 1970-е годы в отечественной педагогике являлся учебник. Он занимал центральное место в модернизации образования, в его разработке участвовали крупные авторские коллективы, состоящие из знаменитых академиков-математиков и педагогов-методистов.

Соответственно, качество учебного пособия во многом определяло качество подготовки обучающихся. Модернизация учебной программы по математике в 1970-е годы требовала модернизации содержания учебных пособий, переработки контрольно-измерительных материалов, а также изменения в изложении учебного материала. Внедрение в школьную математику теоретико-множественного подхода, а также других инновационных заложенных идей требовало регулярной и непрерывной работы не только в создании новых, но и в совершенствовании ранее разработанных учебных пособий [149].

Стоит отметить, что до принятия реформы основного математического образования до 1970 года в школах действовали следующие учебники: «Арифметика. Учебник для 5-6 классов» И.Н. Шевченко; «Алгебра: учебник для 6-8 классов» А.Н. Барсуков; «Геометрия. Учебник 6–8 классов» Н.Н. Никитина [12; 150; 209].

Чтобы оценить степень изменений содержания теоретического материала, а также структуры и содержания учебных пособий по математике общего основного образования, произведем сравнительный анализ учебников данных и новых.

«Арифметика» И.Н. Шевченко и «Математика» Н.Я. Виленкина

До принятия реформы основная школа начиналась с 5-го класса, соответственно, обучающиеся учились по учебнику И.Н. Шевченко с 5-го класса до середины 6-го класса. В отличие от учебника авторского коллектива Н.Я. Виленкина, данное учебное пособие дополнялось сборником задач и упражнений С.А. Пономарева и Н.И. Сырнева [168].

Данный учебник арифметики был введен в массовую школу с 1954 года, его главной установкой являлось усиление роли политехнического образования. Вследствие этого в учебнике уделялось особое внимание устным вычислениям, вычислениям на счетах, табличным вычислениям, прямолинейным и секторным диаграммам.

Кроме того, как отмечал автор данного учебного пособия, на него оказал значительное влияние А.Я. Хинчин, который продвигал идею преобразования арифметики, а именно повышения научного уровня изложения материала. Так, например, под влиянием его идей И.Н. Шевченко в своем учебнике решил вводить после сформулированного правила ее буквенную запись.

Произведем анализ количества страниц, отводимых на изучение материала по каждой из тем, установленных учебной программой (таблица 7) [207].

При анализе тематического содержания данного учебного пособия можно отметить, что наибольшая доля всего учебника уделена теме «Натуральные числа». Сопоставляя количество страниц, отведенных на данный блок с количеством часов по учебной программе, можно сделать вывод, что за урок обучающиеся в среднем проходили по 1,5 страницы, что эквивалентно целому параграфу из данного учебника.

Таблица 7 – Анализ учебного пособия по арифметике И.Н. Шевченко

Тема	**Число часов по программе**	**Число страниц в учебнике**	**Среднее количество страниц,**	**Процент от общего числа**
1. Натуральные числа	40	66	1,65	30 %
2. Обыкновенные дроби	66	47	0,7	21 %
3. Десятичные дроби	66	28	0,4	12 %
4. Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями. Отношение величин	24	35	1,45	15 %
5. Приближенные вычисления	16	17	1,2	7 %
6. Проценты	18	9	0,5	4 %

Продолжение таблицы 7

7. Пропорции. Прямая и обратная пропорциональность	24	25	1	11 %

Таким образом, на каждом новом уроке рассматривалась новая тема. Данная организация учебной деятельности являлась малоэффективной, так как учитель не успевал закрепить изученный материал: «Как бы просто ни был материал изложен в учебнике, а это далеко не всегда так, научиться его читать, да еще такими “порциями”, не так легко» [18, с. 47].

При этом стоит отметить, что на темы «Обыкновенные и десятичные дроби» выделено на прохождение в среднем по полстраницы. Данное небольшое количество обусловлено тем, что в учебном пособии отсутствуют упражнения на закрепление, поэтому на уроках совместно с учебником И.Н. Шевченко использовался сборник задач по арифметике под авторством С.А. Пономарева и Н.И. Сырнева [168].

Однако при изучении темы «Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями» за урок учащиеся проходили также по 1,5 страницы печатного текста. С учетом этого, на работу с задачником по данной теме приходилось совсем мало времени, что не позволяло учителям закрепить данную тему в полном объеме. Идея политехнизма включала в себя задачу улучшения вычислительных навыков обучающихся, но при этом в разрез данной идее на центральные темы было отведено недостаточное время для должного закрепления материала и отработки навыков [207].

Объяснение нового материала происходило посредством индуктивного метода изложения, на наглядных и конкретных примерах. После чего, на основе данного примера формулировалось правило. При анализе текста учебного пособия можно отметить, что изложение материала было выполнено на доступном языке. Но при этом стоит учесть, что в некоторых случаях в изложении материала присутствовала чрезмерное многословность, причем на том материале, который был изучен в начальной школе. Соответственно, описательная часть этих параграфов могла быть опущена или в значительной степени упрощена. В качестве примера приведем изложение простого вопроса из «§ 9. Понятие о сложении»: «Рассмотрим задачу: “Я купил несколько штук яблок. В магазине эти яблоки были уложены в два пакета. Придя домой, я выложил яблоки на тарелку и обнаружил, что в первом пакете было 9 яблок, а во втором 6. Сколько яблок я принес домой?”»

Чтобы ответить на этот вопрос, надо при перекладывании яблок одновременно их пересчитать, например, выкладывая яблоки из первого пакета говорить: одно, два, три и т. д. до девяти, а затем, вынимая яблоки из второго пакета, продолжать: десять, одиннадцать, двенадцать, тринадцать, четырнадцать, пятнадцать. Значит, всего 15 яблок» [207, с. 13].

Данный фрагмент учебника показывает стиль изложения всего материала, так как этот пример многословности не единичен. С педагогической точки зрения можно понять желание автора донести до сознания учеников понятие о сложении в легко читаемой форме. Но с методической точки зрения не стоит забывать, что в первую очередь этот текст был текстом учебного пособия по математике, а не текстом книги для чтения.

По нашему мнению, одной из стилистических особенностей изложения в учебниках по математике и других пособий с техническим направлением являлся определенный уровень научности, который возможно было реализовать для обучающихся 5-6-х классов. Кроме этого, с учетом того, что учебники для последующих классов разработали другие авторы, которые использовали более научный язык в изложении материала, ученикам было тяжело перейти на другую форму восприятия материала, так как ранее они не были к этому приучены.

Рассмотрев учебник И.Н. Шевченко, можно отметить, что теоретический материал был написан доступным языком, но при этом уровень научности в некоторых темах можно было увеличить. Автор на основе некоторых числовых примеров выводил формулы, что содействовало пропедевтике дедуктивного изложения материала в более старших классах.

Помимо учебника, огромную роль в процессе обучения выполнял сборник задач, так как процесс закрепления происходил посредством решения задач и выполнения учебных упражнений. Кроме того, выполнение домашнего задания обучающимися также являлось обязательным условием успешного усвоения материала. Так как в комплекте с учебником И.Н. Шевченко использовался сборник задач под авторством С.А. Пономарева и Н.И. Сырнева, проанализируем данное учебное пособие (таблица 8) [168]:

Таблица 8 – Анализ сборника задач С.А. Пономарева и Н.И. Сырнева

Тема	**Число часов по программе**	**Число упражнений на тему**	**Среднее количество упражнений на урок**	**Процент от общего числа упражнений**
1. Натуральные числа	40	259	7	19 %
2. Обыкновенные дроби	66	420	6	31 %
3. Десятичные дроби	66	258	4	19 %
4. Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями. Отношение величин	24	105	4	8 %
5. Приближенные вычисления	16	70	4	5 %
6. Проценты	8	92	5	7 %
7. Пропорции. Прямая и обратная пропорциональность	24	151	6	11 %

В приведенной таблице были проанализированы упражнения, выделенные на данные темы из курса арифметики 5-6-го классов. Стоит отметить, что в подсчете количества упражнений были учтены и разбиты по темам задания из блока повторения: «общее число упражнений». В таблице под «средним количеством упражнений» предполагалось количество упражнений, выполняемых на уроке и заданных в качестве домашнего задания. Будем исходить из того, что учитель в среднем задавал по 2 упражнения на выполнение дома.

Рассмотрев таблицу 8, можно увидеть, что в среднем наибольшее число упражнений приходилось на тему «Натуральные числа». С учетом нашего предположения, на уроке обучающиеся проходили в среднем по 5 упражнений за урок, что является вполне вероятным, так как большинство упражнений носили устный характер. Наибольшее количество заданий было направлено на закрепление темы «Обыкновенные дроби», что весьма неудивительно, так как данная тема являлась новой и центральной в курсе арифметики. Но на темы «Десятичные дроби»; «Совместные действия с дробями» и «Приближенные вычисления» было выделено чрезмерно мало упражнений, даже с учетом того, что одно упражнение могло включать до шести подпунктов. Малое количество упражнений усложняло работу учителя, что также влияло на закрепление материала.

Стоит отметить, что авторы сборника задач отводили достаточно большое внимание вопросам политехнического обучения (практические работы, повышение вычислительной техники, использование таблиц, диаграмм, русских счетов, промышленная и сельскохозяйственная тематика многих задач). Упражнения были подобраны с учетом принципа разнообразия для того, чтобы избежать торможения восприятия от монотонности и однообразия выполняемых заданий [168].

С 1970 года вводился новый учебник по математике для 4-го класса (3-е издание), при этом до массового введения данный учебник был внедрен в ряд школ, которые работали в экспериментальном режиме в 1968/1969 уч. г. (1-е издание) и в 1969/1970 уч. г. (2-е издание). Стоит отметить, что работа над совершенствованием учебника по математике велась в период реформы непрерывно. В отличие от учебника И.Н. Шевченко учебное пособие Н.Я. Виленкина и др. содержало в себе и теоретический материал, и упражнения, закрепляющие изученный материал, что было удобным как для ученика, так и для учителя. Как ранее было отмечено в предыдущих параграфах, содержание и структура учебного материала были перестроены, по сравнению с учебником по арифметике [39; 40].

Рассмотрим структуру учебников «Математика» для 4-5-го классов Н.Я. Виленкина, К.И. Нешкова, С.И. Шварцбурда, А.Д. Семушина, А.С. Чесноков, Т.Ф. Нечаевой под редакцией А.И. Маркушевича (таблица 9).

Таблица 9 – Анализ учебника по математике для 4-5-го классов Н.Я. Виленкина

Тема	**Число часов по программе**	**Число страниц на тему**	**Число упражнений на урок**	**Среднее число страниц/упражнений на урок**
1. Натуральные и дробные числа	140	116	665	0,8/5
2. Десятичные дроби	75	62	454	0,8/6
3. Основные геометрические понятия	30	38	299	1,2/10
4. Положительные и отрицательные числа	70	85	395	1,2/6
5. Обыкновенные дроби. Действия с обыкновенными и десятичными дробями	105	40	498	0,3/5
6. Геометрические построения	35	47	255	1,3/7

При анализе структуры учебника по математике было выведено среднее количество страниц, которые использовались на уроке. Кроме того, при подсчете количества упражнений, отводимых на тему, учитывались упражнения, которые были включены в блок «Задания на повторение» в разных темах. При анализе упражнений из учебника были обнаружены спорные задания, определение которых к конкретной теме были неоднозначны: «808. Решите с помощью уравнения задачу: 1) Периметр прямоугольника 42 см. Ширина в 6 раз меньше длины. Найдите площадь прямоугольника» [39, стр. 134].

Данное упражнение было представлено в учебнике по математике 4-го класса из блока упражнений «на повторение». В данной задаче требовалось найти геометрические величины (периметр и площадь прямоугольника), при этом, чтобы решить данную задачу, было необходимо применить алгебраический метод (составление уравнения). Но подобные упражнения были отнесены к теме, связанной с ней в силу того, что решение задачи с помощью уравнения являлось лишь способом ее решения. По своей содержательной составляющей данное задание использовало теоретический материал из этой темы: определение периметра, площади прямоугольника [42].

Рассмотрев представленные данные в таблице 9, можно зафиксировать, что темп изучения нового материала был ниже, чем при обучении по учебнику И.Н. Шевченко. С учетом того, что в показатель «среднее число страниц/упражнений на тему» входили упражнения, решаемые и на уроке, и дома, можно увидеть, что на тему «Натуральные и дробные числа» и «Обыкновенные дроби. Действия с обыкновенными и десятичными дробями» было выделено, на наш взгляд, недостаточное количество упражнений для классной работы.

Так, на изучение темы «Распределительный закон умножения» было отведено по учебной программе три часа, в учебнике на закрепление данной темы на уроке было представлено шесть упражнений, из которых одно являлось устным. Кроме того, после параграфа были представлены пять заданий на повторение и пять для домашнего задания. Таким образом, на три занятия было отведено десять упражнений, половина из которых повторяла ранее изученный материал. Учащиеся закрепляли новый материал трех уроков пятью упражнениями, которые решались в среднем за 5-10 минут каждое [207].

В настоящее время трудно определить скорость выполнения заданий, но стоит учитывать, что существовали классы, которые были более предрасположены к математике, и для них представленное количество заданий являлось недостаточным. Поскольку данное учебное пособие предназначалось для массовой школы, то авторам необходимо было учитывать, что обучающиеся могли иметь разные способности к предмету. Соответственно, в каждом классе находились обучающиеся, которые справлялись с упражнениями из учебника быстрее остальных, поэтому, по нашему мнению, необходимо было увеличить количество заданий для более способных.

Наибольшее количество упражнений отводилось на темы, связанные с геометрией. Данное увеличение было обусловлено тем, что большинство упражнений требовало минимальных вычислений. В данной теме наблюдалась большая концентрация устных упражнений, направленных на чтение чертежей, а также заданий на их построение.

Также одним из нововведений в учебнике Н.Я. Виленкина являлось разделение упражнений на закрепление материала, на повторение ранее изученного материала, и задания для домашнего выполнения. Кроме этого, в конце учебника был размещен дополнительный материал, активизирующий интерес к математике, а также задания повышенного уровня сложности [39; 40].

Сравнивая учебные пособия И.Н. Шевченко и Н.Я. Виленкина, стоит отметить, что авторским коллективом под редакцией А.И. Маркушевича была произведена огромная работа. Научность теоретического материала была повышена, в большей степени использовались логические рассуждения, а также происходил плавный переход от индуктивного к дедуктивному методу изложения материала. Не было и многословности, которая отмечалась в учебнике по арифметике. Объединение объяснительного материала и сборника упражнений также являлось удачным решением.

В данном учебном пособии упражнение несло обучающую роль, с помощью которой вводились дополнительные свойства и следствия основного материала. В качестве примера приведем следующее упражнение: «263. Всякое ли число является корнем уравнения: а) $0 \cdot y = 0$; б) $7 \cdot x = 7$; в) $8 \cdot a = a \cdot 8$; г) $9 + k - k = 9$?» [39, стр. 47]. Данное упражнение показывало зависимость между значениями коэффициентов уравнения и значениями его корней, через решение данного задания выводились данные закономерности.

Кроме того, количество упражнений, отводимых на закрепление центральных тем курса «Десятичные дроби» и «Обыкновенные дроби. Действия с обыкновенными и десятичными дробями», было увеличено, что также было верным решением, так как данные темы являлись наиболее проблемными в курсе.

Кроме этого, количество страниц теоретического материала было сокращено по сравнению с учебником И.Н. Шевченко, были ликвидированы чрезмерные нагромождения при разборе задач. Формулировки в учебнике стали более лаконичными, а содержание различных свойств и следствий было сокращено [45].

Таким образом, авторский коллектив Н.Я. Виленкина учел недостатки действующего учебника и смог разработать более совершенную версию. Был переработан теоретический материал, а также система упражнений, которые заметно улучшили качество учебника по математике. Кроме того, даже после признания учебников неудовлетворительными в 1978 году, учебники по математике Н.Я. Виленкина длительное время находились в списке рекомендованных к использованию в школах.

«Алгебра» А.Н. Барсукова и «Алгебра» Ю Н. Макарычева

Учебник по алгебре для 6-8-го классов А.Н. Барсукова под редакцией С.А. Новоселова был введен в массовую школу в 1961 году. Автор излагал материал доступным языком, но при этом сохранял научный стиль повествования. Каждый параграф сопровождался конкретными примерами, которые были подробным образом описаны и разобраны. Изложение материала в начале учебника происходило посредством индуктивного метода изложения материала, но при этом использовались логические рассуждения и выводы при разборе примеров. Начиная с середины учебника появлялись теоремы, к которым было представлено доказательство [12].

Соответственно, автор в данном учебном пособии вводил дедуктивный способ изложения теоретического материала. В учебнике были доказаны следующие теоремы: возведение дроби в натуральную степень; извлечение квадратного корня из произведения, частного и степени; теорема Виета (прямая и обратная); построение графика прямой пропорциональности и линейной функции. Стоит также отметить, что в конце каждой главы автор представлял краткие исторические сведения, что также является положительной характеристикой данного учебного пособия [13].

Так же, как и учебник по арифметике И.Н. Шевченко, учебник по алгебре А.Н. Барсукова не включал упражнения на закрепление изученного материала, а содержал в себе объяснительный текст. Произведем анализ количества страниц, отводимых на изучение материала по каждой из тем, установленных учебной программой (таблица 10) [12].

Таблица 10 – Анализ учебника по алгебре для 6-8-го классов А.Н. Барсукова

Тема	**Число часов по программе**	**Число страниц в учебнике**	**Среднее количество страниц, изучаемые за урок**	**Процент от общего числа страниц**
1. Алгебраические выражения	12	15	1,25	5 %
2. Рациональные числа. Уравнения	24	44	1,8	15 %
3. Действия над целыми алгебраическими выражениями	40	34	0,85	12 %
4. Уравнение в первой степени с одним неизвестным	24	20	0,8	7 %
5. Разложение многочленов на множители	28	11	0,4	4 %
6. Алгебраические дроби	32	19	0,6	7 %
7. Координаты и простейшие графики	12	14	1,2	5 %
8. Система уравнений первой степени с двумя неизвестными	20	17	0,85	6 %
9. Счетная (логарифмическая) линейка	9	10	1,1	3 %
10. Квадратный корень и квадратные уравнения	44	68	1,5	23 %

Продолжение таблицы 10

11. Функции и графики	23	38	1,7	13 %

Проанализировав данные из таблицы 10, можно зафиксировать, что в среднем наибольшее число страниц, отведенных на один урок, относилось к теме «Функции и графики». За счет иллюстративных материалов по этой теме, а также по теме «Координаты и простейшие графики», данные показатели были высокими.

Самое большое количество страниц обучающиеся проходили по теме «Рациональные числа. Уравнения», так как в данном разделе автор представлял слишком большое количество правил и определений, которые были необязательными или которые можно было ввести позднее. Так, например, обосновывать коммуникативное, ассоциативное и транзитивное свойство чисел при сложении и умножении, по нашему мнению, нет смысла, причем обоснование происходит на конкретном примере, что уже было сделано в курсе «Арифметика». Кроме того, в данной теме автор большое внимание акцентирует на выполнении суммы и произведения нескольких чисел, что формулировало отдельные правила для этого. Данные уточнения являлись несущественными и могли быть раскрыты при закреплении тем «Сложение» и «Умножение» [13].

Таким образом, автор чрезмерно подробно описывал теоретический материал, детально рассматривал примеры, что являлось положительной характеристикой учебника, но при этом излишняя подробность нагружала сам параграф, который был очень насыщен новыми определениями и свойствами. Так, в теме «Алгебраические выражения» А.Н. Барсуков подробно рассматривал следующую запись:

«*Ученик купил n тетрадей по 2 коп. за тетрадь и учебник за 8 коп. Сколько заплатил он за всю покупку?* Чтобы узнать стоимость всех тетрадей, надо цену одной тетради умножить на число тетрадей. Значит, стоимость тетрадей будет равна $2 \cdot n$ копейкам. Стоимость же всей покупки будет равна: $(2 \cdot n+8)$.

Заметим, что перед множителем, выраженным буквой, знак умножения принято опускать, он просто подразумевается. Поэтому предыдущую запись можно представить в таком виде: $2n+8$. Получили формулу решения задачи. Она показывает, что для решения задачи надо цену тетради умножить на число купленных тетрадей и к произведению прибавить стоимость учебника. Вместо слова “формула” для подобных записей употребляют также название «алгебраическое выражение» … Для краткости вместо “алгебраическое выражение” говорят иногда просто “выражение”» [12, с. 5].

В рассмотренном отрывке выделены те фрагменты, которые, по нашему мнению, являются совершенно необязательными. Так, запись выражения $2n+8$ могла быть раскрыта не в тексте учебника, а на уроке учителем при решении упражнений, закрепляющих данную тему. Пояснения, которые давались к формуле, были также лишними, так как перед тем, как вывести формулу, уже был сделан вывод о том, как рассчитать стоимость покупки. Уточнение в тексте учебника на замену «алгебраического выражения» на «выражение» также являлось необязательным.

На примере рассмотренного отрывка можно убедиться в том, что автор стремился добиться более понятной и доступной формы изложения теоретического материала для обучающихся: «Автор старался по возможности упростить изложение, сделать его более доходчивым, в некоторой мере приблизить стиль изложения к разговорному языку» [13, с. 6]. Данный параграф занимал ровно три страницы учебника. На представленном примере видно, что текст параграфа можно было сократить почти вдвое. С педагогической стороны на прочтение и на изучение данного текста уходила большая часть урока, если не весь урок. Соответственно, могла быть нарушена структура самого урока, пропущены этапы закрепления и контроля, а это означает, что данный урок превратился из урока изучения нового материла в урок чтения.

В комплекте к учебнику по алгебре 6-8-го классов А.Н. Барсукова прилагался сборник задач П.А. Ларичева. Проанализируем структуру и содержание данного учебного пособия (таблица 11) [115].

Таблица 11 – Анализ сборника задач П.А. Ларичева

Тема	**Число часов по программе**	**Число упражнений**	**Среднее количество упражнений на урок**	**Процент от общего числа упражнений**
1. Алгебраические выражения	12	71	6	4 %
2. Рациональные числа. Уравнения	24	146	6	9 %
3. Действия над целыми алгебраическими выражениями	40	402	10	23 %
4. Уравнение в первой степени с одним неизвестным	24	94	4	6 %
5. Разложение многочленов на множители	28	136	5	8 %
6. Алгебраические дроби	32	303	9	18 %
7. Координаты и простейшие графики	12	70	6	4 %
8. Система уравнений первой степени с двумя неизвестными	20	109	5	6 %
9. Счетная (логарифмическая) линейка	9	40	4	2 %
10. Квадратный корень и квадратные уравнения	44	227	5	13 %
11. Функции и графики	23	128	6	7 %

Проанализировав представленную таблицу, можно зафиксировать, что самое наименьшее количество упражнений на один урок приходилось на тему «Уравнение в первой степени с одним неизвестным». Стоит отметить, что упражнения из данного раздела содержали в среднем по четыре уравнения. Соответственно, в качестве домашнего задания обучающимся, вероятнее всего, задавали одно упражнение, которое включало в себя четыре подпункта. Значит, на уроке решалось три упражнения. Как ранее отмечалось, безусловно, этого количества было бы достаточно для работы на уроке, но автору стоило бы учитывать возможности более способных обучающихся.

Кроме этого, по теме «Счетная (логарифмическая) линейка», реализованной в рамках политехнизма, отмечалось низкое количество упражнений на один урок. Так как данная тема не являлась центральной, а дополняла действующий курс алгебры, был смысл либо сократить количество часов на данную тему, либо также увеличить количество упражнений [115].

Положительной чертой данного сборника задач являлось то, что автор добавил большое количество задач по важным темам: «Действия над целыми алгебраическими выражениями» и «Алгебраические дроби». По другим темам, по сравнению со сборником задач для арифметики С.А. Пономарева и Н.И. Сырнева, было заметно, что П.А. Ларичев разработал большее количество упражнений на курс алгебры. Данный фактор облегчал работу учителя, так как ему хватало с избытком упражнений для классной и домашней работы [168].

Также автор весьма удачно смог разработать упражнения, охватывающие функциональную зависимость. В сборнике задач были подобраны разнообразные упражнения на определение взаимного расположения функций, а также их последующее построение. Кроме того, автор смог разработать такие упражнения по теме «Координаты и простейшие графики», которые усиливали интерес к данной теме и алгебре в целом.

В большинстве случаев в сборнике задач П.А. Ларичева были представлены формулировки заданий шаблонного характера. По нашему мнению, в данном учебном пособии не хватало задач на доказательство. Причем по содержательной части сами задания не изменились бы, преобразовались бы сами формулировки заданий. Так, например, привычные формулировки «разложить многочлен на множители» можно было бы преобразовать в «представить в виде произведения», «доказать тождество», «определить справедливость равенства», «доказать, что при всех значениях переменной получается верное тождество» [115].

Анализ учебников по алгебре для 6-8-го классов Ю.Н. Макарычева

Учебник по алгебре для 6-го класса был разработан коллективом в составе Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравина, под редакцией А.И. Маркушевича в 1972 году. Так же, как и учебники по математике, учебники по алгебре для 6-8-го классов содержали в себе теоретический материал и систему упражнений, закрепляющий его.

Рассмотрим структуру учебников по алгебре для 6-8-го класса Ю.Н. Макарычева (таблица 12).

Таблица 12 – Анализ учебников по алгебре 6-8-го классов Ю.Н. Макарычева

Тема	**Число часов по программе**	**Число страниц на тему**	**Число упражнений на тему**	**Среднее число страниц/упражнений на урок**
1. Систематизация приобретенных в 4-5-х классах представлений о задачах алгебры	12	32	172	2,6/14
2. Отношения, пропорции, одночлены	40	92	409	2,3/10
3. Целые выражения	48	65	333	1,3/7
4. Уравнения и системы уравнений	40	32	157	0,8/4
5. Рациональные выражения	40	73	292	1,8/7
6. Системы счисления. Арифметические устройства вычислительных машин	10	22	21	2,2/2
7. Неравенства. Приближенные вычисления. Извлечение корней	72	104	332	1,4/5
8. Квадратные уравнения	30	90	272	3/9
9. Числовые последовательности. Арифметические и геометрические прогрессии	25	43	242	1,7/10

Продолжение таблицы 12

10. Дробные показатели степени	30	48	186	1,6/6
11. Показательная и логарифмическая функция	35	57	324	1,6/9

Проанализировав учебник Ю.Н. Макарычева, можно зафиксировать, что количество страниц с теоретическим материалом значительно сократилось. В представленной таблице в показателе «среднее число страниц на тему» учитывались страницы не только с объяснительным текстом, но и страницы с упражнениями.

В учебнике А.Н. Барсукова были представлены аналогичные результаты, но уже без упражнений и задач. Таким образом, авторский коллектив Ю.Н. Макарычева смог упорядочить теоретический и иллюстративный материал, преобразовать многие формулировки, правила и теоремы, оптимизировав их в наиболее краткие и лаконичные формы. При этом, как рассматривалось в предыдущем параграфе, научность формулировок во многом возросла, а роль дедуктивного метода изложения материала усилилась. Доказательство и обоснование получили большее число теорем и свойств, что также увеличивало научность учебного пособия [119; 128; 129].

В упражнениях большое внимание уделялось формированию понятий, разъяснению правильного употребления терминов, выработке умения применять введенные понятия при решении различных задач. Наряду с этим достаточное место было отведено упражнениям, направленным на выработку соответствующих навыков [124].

Предполагалось, что предложенная в учебнике система упражнений позволяла учащимся выявить взаимосвязи с различными разделами курса, между алгеброй и другими учебными предметами (геометрией, физикой, географией). Так, например, в учебнике для 6-го класса при изучении темы «Отношение чисел и величин» было представлено следующее упражнение: «Масштаб плана 1: 5000. Каким отрезком изобразится на этом плане расстояние, равное 750 м?» [119, с. 35].

Данное задание демонстрировало междисциплинарную связь между географией и алгеброй, осуществленную в учебнике Ю.Н. Макарычева.

Данный учебник был обеспечен большим объемом упражнений, который решал проблему нехватки заданий на уроке для более способных обучающихся. К каждому пункту учебника, помимо основных упражнений, были представлены дополнительные, помещенные в конце соответствующей главы. Тематика дополнительных упражнений была тесно связана с содержанием пункта. Часть дополнительных упражнений носила дублирующий характер. Эти упражнения могли быть использованы при изучении материала в классе, при повторении, на дополнительных занятиях с отстающими учениками [125].

Часть дополнительных упражнений – задачи повышенной трудности. Их можно было использовать как для работы со всем классом, так и для индивидуальной работы с сильными учащимися. Отдельные задачи могли быть использованы в работе математических кружков. В зависимости от конкретных условий, состава класса, подготовки учащихся, системы работы самого учителя, дополнительные упражнения к главе могли быть использованы в большем или меньшем объеме или даже не использоваться совсем. Представленная в учебнике система упражнений давала возможность учителю использовать разнообразные приемы и формы работы, что, в свою очередь, позволяло учителю использовать индивидуально-дифференцированный подход на уроке [122].

При анализе данных из таблицы 12 можно зафиксировать крайне низкие показатели «среднего числа упражнений на тему» по теме «Системы счисления. Арифметические устройства вычислительных машин». Так как данная тема являлась новой в курсе алгебры, авторы не до конца продумали и оценили систему закрепления нового материала. В данном случае необходимо было либо увеличить количество упражнений, либо сократить количество часов, отведенных на изучение данной темы.

Кроме того, низкое количество упражнений приходилось на тему: «Уравнения и системы уравнений». Как уже ранее было отмечено, низкое количество задач по теме вело к низкому усвоению изучаемого материал. Так, например, в учебнике по алгебре для 6-го класса в параграфе «58. Простейшие системы линейных уравнений» было представлено всего одно упражнение, которое состояло всего из 6 подпунктов. Данного объема заданий явно не хватало на закрепление изученного материла на уроке и дома.

Таким образом, авторский коллектив Ю.Н. Макарычева произвел огромную работу по модернизации и улучшению учебника по алгебре. Были учтены те недочеты, которые были отмечены в учебнике алгебры А.Н. Барсукова. Помимо изменения содержательной части теоретического материала, были преобразованы и стали более лаконичными и научными отдельные формулировки определений и теорем. Кроме того, одной из положительных черт нового учебника по алгебре являлось заметное увеличение объема упражнений, что позволяло учителю, в зависимости от способностей класса, уделять больше времени на закрепление определенных тем. Так же, как и учебник Н.Я. Виленкина, учебное пособие по алгебре Ю.Н. Макарычева длительное время входило в федеральный перечень учебников, одобренных Министерством просвещения РФ [119; 120; 121].

«Геометрия» Н.Н. Никитина и «Геометрия» А.Н. Колмогорова

Учебник по геометрии для 6-8-го классов Н.Н. Никитина был введен в массовую школу в 1961 году. В нем также нашли отражение некоторые идеи политехнизма, были добавлены и освещены следующие темы: «Провешивание прямой линии на поверхности земли»; «Измерение расстояний в комнате и на местности»; «Жесткость треугольника»; «Рейсмас, малка»; «Практические работы на местности»; «Подвижность параллелограмма (шарнирного)»; «Понятие измерения площадей, палетка»; «Практическое применение свойств подобных треугольников»; «Практические задачи с применением тригонометрии»; «Съемка плана земельного участка с помощью астролябии путем обхода по контуру» [150].

В учебнике, как правило, изложение начиналось не с готовых определений, а с построения геометрических образов. Например, приступая к ознакомлению со смежными углами, обучающиеся сначала строили произвольный угол, затем продолжали одну его сторону и получали два угла. К доказательству теорем автор также стремился, где это возможно, подводить учащихся от построения. Например, к доказательству признаков равенства треугольников обучающихся подводили от построения треугольника сначала по одному элементу (стороне или углу), затем по двум элементам и, наконец, по трем элементам.

В учебнике Н.Н. Никитина для 6-8-го классов в конце каждой главы было дано небольшое количество упражнений в виде задач или теоретического вопроса. Цель этих упражнений заключалась в том, чтобы сразу же после того, как будет пройден тот или иной параграф учебника, имелась возможность на вполне доступных упражнениях добиться сознательного использования правил и формул, несколько углубить содержание усвоенного, попробовать применить полученные знания на практике. Решение задач, приведенных в учебнике, не сопряжено с особыми трудностями. Оно нередко могло быть выполнено в уме. Наличие в учебнике такого рода упражнений имело целью до известной степени облегчить работу учителя, освобождая его от необходимости отыскивать эти элементарные упражнения в задачнике.

Рассмотрим структуру учебника по геометрии для 6-8-го классов Н.Н. Никитина (таблица 13) [150].

Таблица 13 – Анализ учебника по геометрии 6-8-го класса Н.Н. Никитина

Тема	**Число часов по программе**	**Число страниц в учебнике**	**Среднее количество страниц, изучаемые за**	**Процент от общего числа страниц**
1. Основные понятия	16	38	2,3	18 %
2. Треугольник	30	32	1	16 %
3. Параллельность	20	18	0,9	9 %
4. Четырехугольники	20	17	0,85	8 %

Продолжение таблицы 13

5. Площадь многоугольника. Поверхность и объем прямой призмы	30	28	0,9	14 %
6. Окружность	34	16	0,4	8 %
7. Пропорциональные отрезки. Подобные фигуры	30	23	0,7	11 %
8. Тригонометрические функции острого угла	15	14	0,9	7 %
9. Вписанные и описанные многоугольники	12	8	0,6	4 %
10. Вычисления площадей и объемов геометрических тел	20	10	0,5	5 %

Проанализировав структуру учебника по геометрии Н.Н. Никитина, можно зафиксировать, что в среднем наибольшее число страниц приходилось на тему «Основные понятия». В среднем на данную тему приходилось чуть больше двух страниц на урок, что объяснялось большим количеством иллюстративного материала в параграфах.

Как видно из представленных данных, по другим темам автор смог избежать излишней многословности, отмеченной у других авторов в учебниках данного периода. Соответственно, теоретический материал был сформулирован кратко и лаконично, что, в свою очередь, благотворно влияло на усвоение новых знаний и умений.

Так как к изучению систематического курса геометрии учащиеся приступали еще в сравнительно раннем возрасте, автор стремился к тому, чтобы изложение материала в учебнике стало более доступным. В некоторых случаях темы излагались в повествовательном плане, иногда носили характер элементарного исследования, в результате которого формулировалась теорема как вывод.

Общепринятый порядок доказательства, свойственный систематическому курсу геометрии: теорема, дано, требуется доказать, доказательство, вывод – вводилось не сразу и только постепенно становилось преобладающим [150].

Особое внимание в учебнике уделялось различному расположению чертежей, чтобы учащиеся не привыкали к стандартному их изображению. Исследования показали, что обучающиеся, например, не узнавали прямого угла, если он изображен так, что его стороны не были параллельны краям классной доски или тетради. Соответственно, по чертежу не узнавали также в этом случае и прямоугольного треугольника. Изменение стандартного чертежа при доказательстве теоремы нарушало ход их рассуждений.

Ко всему прочему, учебник дополнялся сборником задач по геометрии 6-8-го классов под авторством Н.Н. Никитина и Г.Г. Масловой. Положительной чертой данного сборника являлось то, что автор учебника являлся соавтором задачника. Соответственно, связь теоретического материала с упражнениями была усилена. Рассмотрим структуру сборника задач по геометрии для 6-8-го классов под авторством Н.Н. Никитина и Г.Г. Масловой (таблица 14) [151].

Таблица 14 – Анализ сборника задач по геометрии для 6-8-го класса Н.Н. Никитина и Г.Г. Масловой

Тема	**Число часов по программе**	**Число упражнений**	**Среднее количество упражнений на урок**	**Процент от общего числа упражнений**
1. Основные понятия	16	118	7	11 %
2. Треугольник	30	89	3	9 %
3. Параллельность	20	103	5	10 %
4. Четырехугольники	20	24	1	2 %
5. Площадь многоугольника. Поверхность и объем прямой призмы	30	274	9	26 %
6. Окружность	34	118	3	11 %

Продолжение таблицы 14

7. Пропорциональные отрезки. Подобные фигуры	30	31	1	4 %
8. Тригонометрические функции острого угла	15	126	8	12 %
9. Вписанные и описанные многоугольники	12	80	7	8 %
10. Вычисления площадей и объемов геометрических тел	20	77	4	7 %

Проанализировав данные по учебному пособию Н.Н. Никитина и Г.Г. Масловой, можно заметить ощутимый дефицит задач по определенным темам. По нашему мнению, является недопустимым, что на занятие с учетом домашнего задания отводилось одно упражнение.

Не стоит забывать о задачах, представленных в самом учебнике. Так, наименьший показатель «числа упражнений на тему» приходился на центральные темы курса планиметрии «Четырехугольники» и «Пропорциональные отрезки. Подобные фигуры». Так, в учебнике по теме «Четырехугольники» было насчитано 27 упражнений без учета устных заданий, по своей основе эти упражнения относились к типу задач на построение и задач на доказательство. С учетом дополнений из учебника получается, что в среднем на урок по теме «Четырехугольники» обучающиеся выполняли три упражнения, одно из которых относилось к домашнему заданию. Данное количество заданий было недостаточно для успешного закрепления столь важной темы в курсе «Геометрия», а также для продуктивной классной работы. По теме «Пропорциональные отрезки. Подобные фигуры» в самом учебнике насчитывалось 13 упражнений, соответственно в среднем на уроке по данной теме обучающиеся выполняли 1-2 задачи.

Однако для тем: «Основные понятия»; «Площадь многоугольника. Поверхность и объем прямой призмы»; «Тригонометрические функции острого угла»; «Вписанные и описанные многоугольники» в сборнике задач представлен большой объем заданий, что также является положительной чертой данного пособия. Но избыток заданий по одной теме не должен был вызывать недостаток заданий по другим темам. С учетом возможных требований печатных издательств, рациональнее было перераспределить количество упражнений по темам, добившись по показателю «среднее количество упражнений на урок» 5-6 заданий, с учетом того, что на домашнее задание отводилось бы 1-2 задания [151].четыре типа заданий: на вычисление; на построение; на доказательство и задача-вопрос. Причем некоторые из заданий имели практическое применение. Задачи-вопросы включали в себя задания, требующие обосновать приведенные выводы, а также объяснить те или иные факты. Для выполнения данного типа задания от обучающихся требовалось не только знание теоретического материала, но и логическое мышление.

Таким образом, проанализировав учебник и сборник задач по геометрии Н.Н. Никитина, стоит отметить, что учебник был разработан качественно, как отмечал сам А.Н. Колмогоров: «Учебник Н.Н. Никитина хорошо известен учителям, обладает большими методическими достоинствами и в целом отвечает своему назначению … Ближайшие годы он будет с пользой служить нашей школе» [85, с. 26]. Чего нельзя констатировать о сборнике задач Н.Н. Никитина и Г.Г. Масловой. В учебнике представлены упражнения для первичного закрепления материала, а в сборнике были представлены задания для последующей отработки навыков, а также для домашних заданий.

Из данных, представленных в таблице 14, можно зафиксировать критически низкие показатели по количеству упражнений на тему. Данные показатели не позволяли учителю произвести эффективное закрепление, учитывая возможности более способных обучающихся. Положительной чертой сборника задач являлось наличие достаточного объема упражнений с практическим содержанием, что усиливало связь теоретического материала, а также решение абстрактных задач с реальными жизненными обстоятельствами, встречающимися на производстве [151].

Учебник по геометрии для 6-го класса, разработанный авторским коллективом в составе: А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Ф.Ф. Нагибин, Р.С.

Черкасов, был введен в массовую школу в 1972 году. Как отмечалось ранее, стиль изложения стал во многом более научным, но при этом восприятие материала обучающимися заметно ухудшилось. Так, например, авторы учебника относили к достоинству своего учебного пособия то, что доказательство в большей степени опирается на логические рассуждения, а не на практические работы: «Теорема о сумме углов треугольника. Можно … прийти к ней эмпирически, отрывая углы у бумажных треугольников и складывая их ... Но это довольно скучное занятие не дает уверенности в справедливости общего утверждения. Общеизвестное же простое рассуждение воспринимается учащимися как некое откровение: вот оказывается, как все просто и убедительно!» [87, с. 22].

Данное предположение авторов являлось спорным, так как доказательство посредством логических рассуждений могло быть «простым и убедительным» разве для обучающихся математических лицеев. А для учеников массовых школ было бы убедительнее в 6-м классе доказательство именно в ходе практической работы. Абстрактно-логическое мышление в 6-м классе (возраст 12-13 лет) у детей было еще не сформировано, а наглядно-действенное мышление еще с раннего возраста являлось более привычным. Кроме того, в процессе практической работы в учебный процесс был вовлечены все обучающиеся класса, в отличие от логических рассуждений.

Рассмотрим структуру учебников по геометрии для 6-8-го классов под авторством А.Н. Колмогорова, А.Ф. Семеновича, Ф.Ф. Нагибина, Р.С. Черкасова (таблица 15).

Таблица 15 – Анализ учебников по геометрии 6-8-го класса А.Н. Колмогорова

Тема	**Число часов по программе**	**Число страниц на тему**	**Число упражнений на тему**	**Среднее число страниц/ упражнений на урок**
1. Параллельность и перпендикулярность. Осевая и центральная симметрия	60	98	328	1,6/5

Продолжение таблицы 15

2. Параллельный перенос	10	20	62	2/6
3. Окружность и поворот	30	44	227	1,4/8
4. Движения	10	31	101	3/10
5. Пропорциональность отрезков. Подобие фигур	36	48	194	1,3/5
6. Измерение площадей и объемов	25	37	151	1,4/6
7. Метрические соотношения в треугольнике. Тригонометрические функции	30	34	138	1/5

Проанализировав учебники по геометрии для 6-8-го классов А.Н. Колмогорова, можно отметить, что по сравнению с учебником Н.Н. Никитина, данный учебник не дополнялся задачниками. Соответственно, при расчете показателя «среднее число страниц на урок» учитывались также страницы, содержащие упражнения. Таким образом, по сравнению с учебником Н.Н. Никитина данный показатель на небольшое количество возрос, что объясняется повышением числа упражнений.

В конце каждой главы были представлены упражнения на повторение всех параграфов, входящих в каждую главу. При подсчете показателя «число упражнений на тему» были также учтены и задания на повторение. Как видно из данных, представленных в таблице 16, авторы добавили достаточный объем упражнений, которого хватало для работы с разными группами обучающихся, а также для более глубокого закрепления материла. Также стоит отметить, что, как и в сборнике задач по геометрии Н.Н. Никитина, в учебнике А.Н. Колмогорова также присутствовали задания-вопросы, выполнение которых требовало от обучающихся логических рассуждений [80; 81; 82].

Наибольшее число упражнений приходилось на тему «Движения», большой показатель объяснялся количеством устных упражнений, а также заданий на доказательство и на построение. Кроме того, в данной теме активно использовались задачи-вопросы, которые также носили устный характер: «Сколько лучей, сонаправленных с данным лучом, можно провести из данной точки?» [81, с. 64].

Аналогичная ситуация по показателю «среднее количество упражнений на урок» прослеживалась при изучении темы «Окружность и поворот». В данной теме также преобладали задачи-вопросы устного характера, а также задачи на построение. Этими факторами объясняется высокое значение рассматриваемого показателя.

В новых учебниках авторами часто заявлялось, что упражнение носило обучающий характер. Рассмотрим пример такого упражнения: «При каких значениях числа *n* возможны следующие соотношения: а) $|n\vec{c}| < |\vec{c}|$; б) $|n\vec{c}| > |\vec{c}|$; в) $|n\vec{c}| = |\vec{c}|$; где с – ненулевой вектор?» [81, с. 75]. В процессе решения данного задания обучающиеся приходили к выводу о зависимости длины вектора при умножении на определенное число. Данный пример является не единичным, некоторые свойства и выводы не были сформулированы в виде готовых правил, а завуалированы в виде упражнений, которые «открываются» в процессе их выполнения.

Об особенностях содержания теоретического материала было сказано ранее. Но стоит отметить, что в период 1974–1978 годов материал практически ежегодно претерпевал изменения: некоторые темы опускались, в определенные периоды не требовались доказательства некоторых теорем: «Министерство просвещения РСФСР ежегодно … предлагало ряд мер по снижению темпов реформы, облегчению программных требований; выражало свои сомнения по поводу забвения отечественных школьных традиций. Под давлением фактов пошли даже на такой крайний шаг, как отмена экзамена по геометрии» [93, с. 229].

Отметим, что учебник по геометрии для 6-8-го классов в отличие от учебников по математике и алгебре преобразовывался неоднократно. Можно выделить три основных этапа развития учебника по геометрии.

1. Первый этап можно отнести к периоду 1970–1972 годов. На данном этапе учебник носил экспериментальный характер, был выпущен малым тиражом и введен в ограниченный ряд школ.

2. Второй этап включает 1972–1978 годы. В данный период учебник внедрялся в массовые школы повсеместно.

3. Третий этап 1979–1982 годов характерен тем, что учебники для 6-8-го классов были объедены в единое учебное пособие по планиметрии. Как отмечал сам авторский коллектив, последние издания в значительной степени отличались от тех, по которым учились в массовых школах: «существенно сокращен объем текста; заметно обновлен корпус задач и система упражнений; практически полностью переписана и сокращена часть, относящаяся к 6 классу. Сопоставление «Геометрии 6-8» с предшествующим изданием приводит к выводу, что речь идет скорее о новом учебнике, а не о доработанном» [1, с. 222].

Таким образом, проанализировав структуру учебников и задачников по математике, которые действовали до вступления реформы с новыми учебниками, можно выделить ряд их преимуществ. В первую очередь следует отметить, что в «дореформенных» учебниках использовался во многом индуктивный подход к изложению материала, причем зачастую повествование объяснительного текста принимало форму разговорного стиля. Соответственно, в тексте присутствовала излишняя многословность простых и очевидных позиций. Новые учебники преодолевали данные недостатки, так как над новыми формулировками определений и теорем была проведена значительная работа научно-педагогического коллектива.

По свидетельству А.М. Абрамова, «личное участие А.Н. Колмогорова в работе над учебниками было очень велико. Основное внимание он уделял теоретическому тексту – определял структуру, изучал предварительно подготовленные соавторами варианты … На решающих этапах подготовки к печати (длящейся месяцами непрерывной работы) эти варианты переписывались практически заново; многие ключевые пункты и разделы переделывались многократно» [1, с. 178].

Кроме того, наиболее важной чертой новых учебников являлось заметное увеличение объема упражнений на каждую тему. Данное преобразование оказывало ощутимую помощь учителям при организации учебной деятельности. Кроме того, увеличение объема заданий, а также дифференциация их по разным уровням сложности позволяла учителям использовать различные методы и формы обучения, удовлетворяющие запросам различных групп обучающихся с разными способностями к математике.

Объем материала для закрепления давал возможность учителю использовать учебник не только на уроках, но и на дополнительных занятиях для отстающих обучающихся, для организации математических кружков. Также, помимо увеличения числа упражнений на урок, были изменены формулировки многих заданий и их содержательная часть. Данные изменения превращали шаблонные задания в их более разнообразные формы, которые активизировали мыслительную деятельность обучающихся. Наряду с этим, авторскими коллективами уделялось большое внимание разработке системы закрепления изученного материала: «А.Н. Колмогоров указывал задачи, которые следует удалить, заменить или отредактировать, вносил в формулировки правку, предлагал вводить отдельные циклы. Ряд задач придуман им самим. Вносимые после замечаний Андрея Николаевича исправления всегда проходили его окончательный контроль» [1, с. 178].

В большинстве случаев, по полученным данным при анализе учебных пособий, была видна тенденция, направленная на улучшение их качества, но содержательная часть теоретического материала под воздействием новых подходов и идей значительно повысила сложность изложения этого материала. В целом новые формулировки определений и теорем действительно стали звучать более научно, но при этом и непонятнее для учеников. Преобразование теоретического материала, а соответственно увеличение его научности, пропорционально ухудшало восприятие текста обучающимися, что и привело к тому, что в итоге в 1978 году новые учебники математики были признаны «недоброкачественными и неудовлетворительными» [95, с. 90].

Реформа основного общего математического образования смогла активизировать работу научно-педагогического сообщества. Она смогла создать и объединить новые авторские коллективы, состоящие из видных методистов и ученых-математиков. Как отмечал А.М. Абрамов, «благодаря реформе сейчас мы имеем целый ряд новых учебников, созданных под руководством и при участии крупных советских математиков – А.Д. Александрова, С.М. Никольского, А.В. Погорелова, А.Н. Тихонова, Д.К. Фаддеева» [1, с. 288]. Кроме того, анализ новых учебников рельефно показал те недостатки и ошибки, которые были допущены при их разработке.

Одной из главных причин неудачи реформы общего математического образования являлись новые учебные пособия, которые были признаны неудачными на общем собрании отделения математики АН СССР в 1978 году.

Главной негативной проблемой в написании учебника являлся дефицит времени. По мнению И.П. Костенко, «создать учебник за один год невозможно. Невозможно и за десять лет. Учебники создаются преемственным трудом нескольких поколений» [105, с. 233]. Однако процесс написания учебников проходил в ускоренном режиме, на обсуждение отдельных формулировок у авторского коллектива времени не оставалось. По свидетельству А.М. Абрамова, «поскольку и А.Н. Колмогоров и его соавторы А.Ф. Семенович и Р.С. Черкасов делали все возможное, чтобы улучшить учебник, работа превращалась в изматывающий конвейер переделок, останавливающийся только в момент, когда проходили все мыслимые сроки сдачи рукописи в издательство» [1, с. 211].

Но при всех недостатках созданные в 1970-е годы учебные пособия смогли реализовать идеи, которые стали развиваться позднее. Одной из центральных идей являлось преодоление дифференциации математики как предмета и последующее его объединение предметов «арифметика», «алгебра», «геометрия» в целостный предмет «математика» с помощью теоретико-множественного подхода.

На основе рефлексии были доработаны учебники, а также разработаны новые. По свидетельству А.М. Абрамова, «в ходе работы над новыми пособиями появились многие свежие идеи, стали понятнее многие проблемы школьного учебника математики» [1, с. 218].

Как ранее было отмечено, учебники по математике Н.Я. Виленкина и учебники по алгебре Ю.Н. Макарычева длительное время являлись действующими учебниками в массовых школах.

В процессе развития российской системы образования ее цели и задачи также будут меняться, как это было в 1970-х годах. А вместе с тем будут меняться и компоненты образования, одним из которых является школьный учебник. При разработке новых учебных пособий следует учитывать те сложности, с которыми столкнулись авторские коллективы, состоящие из признанных ученых, педагогов и методистов, и на основе выявленных проблем выбирать наиболее рациональные пути их решения.

2.4 Сравнительный анализ методических пособий по общему математическому образованию

2.4.1 Инновационные подходы в методике обучения математике

Вместе с изменением учебных программ и учебных пособий реформа основного общего образования изменила методику преподавания математики. Поскольку структура и содержание некоторых математических понятий с внедрением теоретико-множественного подхода были преобразованы, соответственно, преподавание также требовало изменений. Существенно, что в разработке методических подходов к реализации новой программы 1971 года активно участвовал А.Н. Колмогоров [193].

Новые учебные пособия по математике существенно отличались от ранее действующих. Были переосмыслены многие принципы и функции элементов учебника. Так, например, упражнения в учебнике носили обучающую роль, соответственно, учителям необходимо было перестроить свою методику преподавания, а также организовывать процесс обучения по-новому.

Правильная организация учебной деятельности обучающихся всегда являлась важной составляющей успешного и продуктивного урока. Помимо того, что реформа изменила содержание некоторых методических вопросов в преподавании математики, также появились новые способы и методы преподавания, активизирующие интерес к предмету.

Теперь каждый учебник дополнялся пособием «В помощь учителю». В данном пособии были сформулированы планируемые результаты изучения тем; разъяснения; упражнения, выполняемые в классе; ответы к упражнениям, выполняемые дома; устные упражнения с дополнительными упражнениями.

В планируемых результатах был представлен перечень знаний и навыков, которые должны были приобрести учащиеся в результате работы над соответствующим пунктом учебника. Так, например, ученик 4-го класса по теме «Неравенства» должен был «знать определение решения неравенства, уметь выяснить, является ли данное число решением неравенства или не является» [42, с. 26].

После того, как для каждого урока были сформулированы планируемые результаты, учитель формировал дидактические цели своих занятий, с помощью которых достигались данные результаты. В учебном пособии, помимо обозначения планируемых результатов, давались методические советы и обобщались дополнительные сведения по изучаемому материалу.

Упражнения, предназначенные для решения на уроке самостоятельно или под руководством учителя, следовали, как правило, вслед за объяснительным текстом. Они образовывали систему упражнений, позволяющую основательно формировать вводимые понятия. В пособии «В помощь учителю» имелось решение всех упражнений, выполняемых в классе. Отдельные упражнения снабжались двумя или более решениями, если эти решения существенно отличались одно от другого. Большое внимание в пособии уделялось оформлению решений. Во многих случаях были показаны образцы записи. Все это могло оказаться особенно полезным начинающему учителю, позволяло ему лучше представить значение каждого упражнения во всей системе заданий и легче разбираться в разнообразных решениях, которые предлагались учащимися на уроках [94].

К каждому уроку предлагался набор устных упражнений, который состоял из трех частей.

В первой части содержался материал для устного счета. Его назначение – тренировка учащихся в устном счете и закрепление различных приемов устного счета. Упражнения формулировались так, чтобы систематически «работали» основные математические термины, которые должны были усвоить учащиеся. Этим объяснялось разнообразие форм задания. Например, «сложите числа», «прибавьте к одному числу другое», «увеличьте число на несколько единиц», «найдите сумму чисел», «найдите значение суммы». К каждому упражнению давался ответ.

Вторая часть устных упражнений состояла из одной или, реже, двух текстовых задач с небольшими числами, чтобы вычисления не затрудняли учащихся. Задача рассчитывались на средних и слабых обучающихся, выполнение занимало 1-2 минуты.

Третья часть устных упражнений содержала более трудную задачу. Для ее решения были необходимы не только знания, но и умение проявлять некоторую сообразительность. Такие задачи предназначались для развития мышления учащихся. Объяснение их решения содействовало развитию речи.

Кроме того, в целом устные упражнения служили одним из средств организации повторения. С их помощью учитель мог интереснее организовывать подготовку к изучению нового материала [118].

Вместе с устными упражнениями в пособии «В помощь учителю» были представлены дополнительные упражнения. Данные упражнения были предназначены для групп обучающихся со слабыми вычислительными навыками или слабым пониманием зависимости между величинами. Они были подобраны из расчета двух упражнений на один урок. Дополнительные упражнения были стандартными по содержанию и форме. Они предназначались для повторения изученного материала и развития навыков.

Таким образом, дополнительные учебные пособия «в помощь учителю», а также дидактические материалы с контрольными и самостоятельными работами оказывали дополнительную поддержку при организации урока. Сформулированные устные и дополнительные упражнения помогали учителям в подготовке к урокам, позволяя им использовать различные формы контроля выполнения представленных заданий. Кроме этого, выделенные планируемые результаты давали возможность учителю определять цели для каждого этапа урока, добиваясь более продуктивного результата обучения. Но при этом короткие методические советы, приведенные в данных пособиях, едва ли могли мгновенно научить новой методике преподавания математики [94].

Сравнивая методику проведения уроков по математике середины 1960-х и середины 1970-х, можно отметить, что методика организации деятельности, в частности изучение нового материала была изменена. Рассмотрим схему урока изучения нового материала середины 60-х годов, представленную в таблице 16 [139].

Таблица 16 – Структура урока по математике 1965 года

Этап урока	**Комментарий**
1. Активизация	На данном этапе происходило «включение» обучающихся в учебную деятельность. Авторы методического пособия предполагали под данным этапом разные формы его организации. В качестве примера авторы рекомендовали начинать с самостоятельной работы, аналогичной домашнему заданию, или математического диктанта.
2. Изучение нового материала	На данном этапе ученики начинали чтение изучаемого параграфа учебника, а также его последующее понимание. Авторы методического пособия предлагали следующие варианты организации данного этапа урока: 1. После прочтения параграфа вызывался один из учащихся, которому одноклассники и учитель задавали вопросы по прочитанному. Учитель давал разъяснения в затруднительных моментах изучаемого параграфа учебника.

Продолжение таблицы 16

	2. Изучение происходило посредством беседы, на которой рассматривались определенные вопросы, «подводящие» к основной теме, или при помощи решения задачи и последующего обсуждения решения. 3. Также изучение нового материала могло происходить в процессе выполнения лабораторной работы или иной творческой работы.
3. Закрепление изученного материала	Закрепление происходило с помощью репродуктивного метода: перед учениками был представлен образец – пример, решенный на доске. Обучающиеся должны были решить самостоятельно, по аналогии с образцом, ряд примеров. В процессе самостоятельной работы учитель контролировал процесс выполнения заданий, давая ученикам указания в случае затруднений. Обнаруживая пробелы в знаниях, учитель давал отстающим ученикам индивидуальные задания. Для более сильных учеников преподаватель также предоставлял индивидуальные задания на заранее подготовленных карточках. Также методисты рекомендовали использовать самостоятельное решение задач обучающимися с использованием параллельного комментирования. Устные упражнения также должны были разнообразить процесс закрепления материала. Авторы уделяли особое внимание использованию разнообразных форм деятельности, призывая избавляться от монотонности процесса обучения.
4. Повторение ранее изученного материала	На данном этапе происходило повторение ранее изученного материала, причем данный материал не был связан с изучаемой темой урока. В большинстве случаев задания на данном этапе урока носили вычислительный характер.
5. Домашнее задание	На данном этапе учитель давал указания по домашнему заданию.

Рассмотренная структура организации урока, представленная в пособии «Методика преподавания математики» под авторством С.А. Гастева и др. предлагала учителю изучение нового материала посредством прочтения учебника, а закрепление материала происходило репродуктивным способом (решение аналогичных примеров по приведенному образцу).

Однако авторы рассматривали тот случай, когда «открытие» материала происходило посредством решения задачи или ответа на ряд вопросов, кроме того, методисты призывали использовать на данном этапе лабораторные работы. Это свидетельствовало об усилении тенденции использования проблемного обучения на уроках математики. При этом процесс решения поставленной учебной задачи и «открытие» нового знания были выражены не явно. В пособии не были описаны методика создания проблемной ситуации и сам проблемный подход к обучению. Стоит отметить, что на этапе закрепления материала давались методические рекомендации, призывающие учителя к использованию индивидуального подхода в обучении, учитывая способности различных групп обучающихся [139].

В 1975 году было издано пособие «Методика преподавания математики в средней школе (общая методика)» под авторством Ю.М. Колягина, В.А. Оганесяна, В.Я. Саннинского, Г.Л. Луканкина. В данном методическом пособии был освящен ряд вопросов, связанных с эвристическим методом обучения, методом активного обучения, методом программированного обучения, проблемным обучением и индивидуализацией обучения. В рассматриваемой литературе приводились примеры новых педагогических идей и методик. Также прилагались дидактические материалы к техническим средствам (диапроекторы и кодоскопы), применяемые в обучении. Рассматривая методическое пособие, можно удостовериться, что к 1975 году принципы, формы и методы обучения математике во многом были модернизированы, предоставляя учителю еще больше возможностей для организации качественного учебного занятия.

Рассмотрим схему урока изучения нового материала середины 70-х годов, представленную в таблице 17 [94].

Таблица 17 – Структура урока по математике 1975 года

Этап урока	**Комментарий**
1. Актуализация	Авторы настоятельно рекомендовали начинать урок с устных упражнений. При анализе пособия «В помощь учителю» можно было удостовериться, что для каждого занятия было предложено достаточное количество устных упражнений разного уровня сложности. Кроме этого, авторы допускали использование различных математических диктантов, подготавливающих к восприятию нового материала. На данном этапе урока проверялся и воспроизводился в первую очередь тот учебный материал, который непосредственно был необходим для успешного восприятия нового.

Продолжение таблицы 17

2. Изучение нового материала	В данный этап урока ставилась проблемная задача, далее происходил коллективный поиск решения данной задачи в виде необходимого опыта и наблюдения, по средствам которого формулировалась гипотеза, правило или определение. При участии учащихся происходило обоснование данной гипотезы.
3. Первичное закрепление материала	Первичное закрепление заключалось в решении либо устных, либо несложных письменных заданий, целью которых являлась обратная связь для учителя об уровне понимания изучаемого материала. На данном этапе решались следующие учебные задачи: распознавание понятия по его определению; воспроизведение (не дословное) формулировки теоремы или ее доказательства; подведение заданного объекта под условия теоремы и распространение на него заключения; воспроизведение или применение установленного на уроке алгоритма.
4. Самостоятельная работа	На данном этапе урока совершенствовались навыки и умения в применении полученного знания. Авторы рекомендовали использовать на данном этапе обучающую самостоятельную работу, на которой ученики применяли изученный материал для решения типовых заданий. Обучающие задания, которых было достаточно, как показал анализ учебников по математике, дополняли изученный материал.
5. Домашнее задание	На данном этапе обучающиеся получают четкую инструкцию и методику к заданиям, выполняемым дома.

На основе рассмотренной структуры урока можно убедиться в том, что методисты середины 1970-х годов в большей степени рекомендовали использовать принципы проблемного обучения. Отличительной чертой уроков по новой программе являлось широкое использование устных упражнений. Кроме того, разнообразные типы упражнений, представленные в новых учебниках по математике, позволяли проверять умение обучающихся к распознаванию нового понятия, изучаемого на уроке. После тренировки по распознаванию нового понятия (первичного закрепления) обучающиеся уже могли закреплять его в традиционном формате, отрабатывая изученные алгоритмы на конкретных примерах.

Главные отличия уроков математики середины 1970-х заключались в создании проблемной ситуации, а также коллективном поиске решения поставленной проблемы. Исключалось перечитывание учебника и последующее воспроизведение прочитанного. Обучающиеся учились мыслить и размышлять, формулируя подходы и поднимаясь самостоятельно к новому знанию. Данный метод являлся до сих пор наиболее продуктивным для вдумчивого усвоения материала обучающимися, но при этом и сложнее в организации учебной ситуации, в процессе которой происходил поиск ее решения.

Стоит отметить, что структура урока могла отличаться от тех, которые были рассмотрены в таблицах 16 и 17. Творчество учителя, а также особенности изучаемого материала могли преобразовывать данные этапы урока: «Перечисленные необходимые элементы урока в зависимости от его основной цели различным образом сочетаются, образуют структуру урока этого вида» [94, с. 322].

Но при этом авторы методического пособия настаивали на создании проблемной ситуации при изучении нового материала, а не на репродуктивном способе изучения материала (решении типовых и однообразных примеров по заданному образцу): «Иными словами, в определенный момент на уроке создается проблемная ситуация, на языке учащихся формулируется соответствующая проблема» [94, с. 302].

Стоит также отметить, что в «Методике обучения математике IV–V классах» под авторством Е.И. Лященко и А.А. Мазаник раскрывалась суть объяснительно-иллюстративного метода изложения материала без использования проблемной ситуации. Но при этом методисты подчеркивали важность баланса использования методов обучения: «на уроках необходимо разумное применение репродуктивных и продуктивных методов обучения» [118, с. 84].

Таким образом, к тому времени, когда реформа основного общего математического образования вступила в силу, методика организации уроков была модернизирована. Были переосмыслены многие цели и задачи, которые выполнялись на уроке. В соответствии с новыми требованиями изменились педагогические приемы, методы и формы преподавания математики. Кроме того, на уроках все чаще использовались различные технические средства, придавая большую наглядность в обучении.

2.4.2 Сравнение методических особенностей преподавания математики

Особенности теоретико-множественного подхода, реализуемые посредством реформирования математического образования, внесли определенные изменения в методику преподавания математики не только новых тем, но и существующих. Так, некоторые вопросы из традиционного курса математики опирались на понятия из теории множеств, методика их преподавания также претерпела определенные изменения.

«Арифметика» И.Н. Шевченко (5-6 класс) и «Математика» Н.Я. Виленкина (4-5 класс)

Сравнивая учебник по арифметике И.Н. Шевченко и учебник по математике Н.Я. Виленкина, можно сразу же заметить определенные различия в центральной линии курса. Центральную линию данного курса как и арифметики, так и математики составляли темы «Натуральные числа»; «Обыкновенные дроби» и «Десятичные дроби». Произведем сравнительный анализ методик преподавания данных тем (таблица 18).

Таблица 18 – Сравнение методик преподавания отдельных тем

Тема	**И.Н. Шевченко**	**Н.Я. Виленкин**
Натуральные числа	**Определение: «**Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, возникающие в процессе счета, называются натуральными (целыми) числами, а совокупность этих чисел, расположенных в порядке их возрастания, называется натуральным рядом» [207, с. 8].	**Определение:** «Числа, употребляемые при счете предметов, называют натуральными числами» [39, с. 3]. **Примечание:** Понятие натурального числа дополнялось понятием «множество натуральных чисел»
	Тема «натуральные числа» состояла из нескольких элементов, которые развивались постепенно: нумерация устная и письменная; система арифметических действий; законы арифметических действий; делимость чисел.	Тема «натуральные числа» изучалась совместно с темой «дробные числа». При этом формировались понятия «переменная»; «уравнение» неравенство.

Продолжение таблицы 18

	Определение: «При сложении два числа соединяются в одно число, содержащее в себе все единицы, входившие в данные числа» [207, с. 13].	**Определение: «**Если два непересекающихся множества предметов объединить в одно множество, то число, показывающее, сколько элементов в новом множестве, называется суммой чисел, соответствующих двум исходным множествам. Нахождение суммы двух чисел называется сложением этих чисел» [118, с. 117].
	Свойства арифметических действий с натуральными числами происходило по следующему принципу: решение задачи разными способами; анализ решений и формулирование обобщающего вывода; формулирование свойства в совестной форме; формулирование свойства в виде формулы.	Свойства арифметических действий с натуральными числами происходило по следующему принципу: решение задач, приводящих к свойству; формулирование свойства в виде формулы; формулирование свойства в совестной форме; проверка формулы при подстановке различных переменных.
	При изучении делимости натуральных чисел рассматривались: признаки делимости; разложение на простые множители; общие делители нескольких чисел; НОК. **Примечание:** программа не содержала понятие «НОД».	При изучении делимости натуральных чисел рассматривались: признаки делимости; разложение на простые множители; общие делители нескольких чисел; НОД и НОК.
	Определение: «делением называется действие, посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из этих сомножителей отыскивается другой сомножитель» [207, с. 43].	**Определение:** «разделить число a на число b значит найти такое число x, при умножении которого на число b получается a: $x \cdot b = a$. Число x называют частным чисел a и b, число a называют делимым, а число b – делителем и пишут: $x = a: b$» [39, с. 117].
	В учебнике было дано четкое определение: «Наименьшим общим кратным нескольких чисел называется самое меньшее число, которое делится на каждое из этих чисел» [207, с. 61].	Определение НОК не было точно сформулировано, оно представлялось на конкретном примере. При этом НОК раскрывалось как множеством, образованным при пересечении других множеств чисел.

Продолжение таблицы 18

Десятичные дроби	После темы «натуральные числа» изучались «обыкновенные дроби».	После темы «натуральные числа» изучались «десятичные дроби».
	В учебнике нет четко сформулированного определения десятичной дроби. Десятичная дробь рассматривалась как частный случай обыкновенной дроби, а именно способа записи обыкновенной дроби со знаменателями 10, 100, 1000 и т. д. В методической литературе под десятичной дробью понимали: «Десятичной дробью называется дробь, у которой знаменатель – число, изображенное единицей с последующими нулями» [139, с. 253].	Перед введением понятия десятичная дробь изучались метрические системы мер, с помощью которых раскрывалась необходимость изучения десятичных дробей. При этом в учебнике десятичные дроби не были представлены как новое множество, расширяющие учение о числе, а также рассматривалось как способ записи чисел: «любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде десятичной записи или, как говорят иначе, в виде десятичной дроби» [39, с. 144].
	Свойства арифметических действий с десятичными дробями вводились по аналогии со свойствами обыкновенных дробей.	Свойства арифметических действий с десятичными дробями вводились по аналогии со свойствами натуральных чисел.
	Сложение и вычитание начиналось с приведения дробей к общему знаменателю.	Сложение и вычитание начиналось с уравнивания числа знаков после запятой.
	В начале рассматривалось умножение натурального числа на десятичную дробь, а после формулировался алгоритм умножения десятичных дробей.	Вводился алгоритм умножения десятичных дробей, отдельно не рассматривался случай умножения натурального числа на десятичную дробь.
	В начале рассматривалось деление десятичного числа на 10, 100 и т. д. После рассматривались случаи деления десятичной дроби на натуральное числа, далее формулировался алгоритм деления десятичных дробей.	В начале рассматривалось деление десятичной дроби на натуральное число. После вводились частные случаи деления на 10, 100, и т. д. После этого формировался алгоритм деления десятичных дробей.
Обык	Изучались после темы «Натуральные числа» и перед темой «Десятичные дроби».	Изучались после темы «Десятичные дроби».

Продолжение таблицы 18

	Понятие «дробь» вводилось в начальной школе, при этом знаменатели не превышали 10.	Понятие «дробь» по новой программе вводилось в начальной школе в 3 классе.
	Определение: «Число, составленное из одной или нескольких равных долей единицы, называется дробью» [207, с. 69].	**Определение:** «Пирог разрезан на 4 равные части. Из них 1 часть лежит на одной тарелке, а 3 части – на другой ... Пишут: $\frac{1}{4}$ пирога и $\frac{3}{4}$ пирога. Говорят, что $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ – это обыкновенные дроби» [39, с. 6].
	После введения понятия «дробь» рассматривалось появление данного понятия, а также изображение дроби на числовой прямой. Формулировалось понятие «равных дробей»: «Две дроби считаются равными, если величины, соответствующие этим дробям, равны между собой (при одной и той же единице измерения)» [207, с. 71].	Понятие «равных дробей» формулировалось сразу же после введения понятия «обыкновенной дроби»: «Две равные дроби – это различные обозначения одного и того же числа» [39, с. 6].
	Изучение темы «Обыкновенные дроби» раскрывалось сразу же, без интервального изучения. Так, далее по плану изучалось основное свойство дроби, а также приведение дробей к общему знаменателю. После чего рассматривалось одновременно сложение и вычитание обыкновенных и смешанных дробей как с одинаковыми, так и с разными знаменателями.	Сложение обыкновенных дробей по новой программе было разделено, так сложение обыкновенных дробей с одинаковым знаменателем изучалось совместно со сложением натуральных чисел. Далее вводилось умножение обыкновенной дроби на натуральное число. Дальнейшее изучение обыкновенных дробей происходило после изучения темы «Десятичные дроби». После изучения десятичных дробей рассматривалось повторно сложение и вычитание обыкновенных дробей с одинаковым знаменателем, далее смешанных. После чего вводилось основное свойство дроби.
	Изучение умножения и деления с обыкновенными дробями рассматривалось блоками по одной схеме: умножение (деление) целого числа на целое; нахождение дроби от числа и числа по его дроби;	После введения основного свойства дроби по новой программе рассматривалось: умножение дроби на дробь; умножение смешанных чисел; деление дробей; деление смешанных чисел, умножение

Продолжение таблицы 18

	умножение (деление) целого числа на дробь; умножение (деление) дроби на дробь; умножение (деление) смешанных чисел.	смешанного числа на натуральное; нахождение дроби от числа и числа по дроби.

Первые темы учебников начинались с изучения натуральных чисел. В учебнике Н.Я. Виленкина понятие о числе расширялось с помощью теоретико-множественного подхода. С первых тем вводилось понятие множества, при этом натуральные числа рассматривались с помощью теории чисел. Данное введение обусловливалось тем, что авторы стремились создать систему понятий о числе, состоящую из подмножеств комплексных, действительных, рациональных, иррациональных, целых и натуральных чисел [39].

Понятие об арифметических действиях с натуральными числами также было преобразовано. Как представлено в таблице, понятие «сумма натуральных чисел» рассматривалось в учебниках по-разному. Так, в учебнике Н.Я. Виленкина при изучении арифметических действий на множестве натуральных чисел рассматривалось не «соединение единиц», а пересечение двух и более множеств натуральных чисел, выполнение операции дизъюнкция. В отличие от учебника по прошлой программе, в новом учебнике арифметические действия с натуральными числами рассматривались с помощью логических действий над множеством, что являлось новым взглядом на данную традиционную тему.

Изложение и выводы теоретического материала также были изменены. В учебнике И.Н. Шевченко схема изучения свойств арифметических действий натуральных чисел носила в большей степени индуктивный характер, на конкретных примерах формулировалось словесное правило, после чего выводилась формула [207].

В учебнике Н.Я. Виленкина изучение свойств также носило индуктивный характер, но при этом уровень «научности» был выше, потому что формулирование формулы происходило за счет создания проблемной ситуации, после чего происходило доказательство выведенных формул эмпирическим путем.

Научность изложения некоторых позиций была повышена, так, определение элементарного понятия «деление натурального числа», представленного в таблице 18, наглядно показывало разницу изложения понятий, входящих в традиционный курс математики. Абстрактность формулировки была увеличена, в большей степени использовались буквенные выражения, характеризующие изучаемые понятия, что ухудшало восприятие данных определений [39].

Нововведением в изучении материала являлось изучение десятичных и обыкновенных дробей. По новому учебнику изучение данных тем было разделено в течение двух классов, при этом изучение начиналось с десятичных дробей. Это обусловливалось необходимостью использования метрических мер измерения, кроме этого, схожих свойств со свойствами арифметических действий с натуральными числами. В силу того, что изучение обыкновенных дробей и действий над ними происходило после изучения понятия «десятичная дробь», была изменена методика преподавания действий с десятичными дробями [94].

По учебнику И.Н. Шевченко материал с десятичными дробями опирался на понятия из темы «Обыкновенные дроби», десятичная дробь являлась частным случаем обыкновенной дроби со знаменателем 10, 100 и т. д. В новом учебнике усиливалась роль десятичных дробей за счет политехнизации обучения, а также возрастания роли в практической деятельности [139].

Изучение обыкновенных дробей, в частности арифметических действий с дробями и смешанными числами, было также разделено на несколько блоков на протяжении двух классов обучения. Соответственно, порядок и структура изучения действий с обыкновенными дробями также была изменена. Стоит отметить, что в отличие от учебника И.Н. Шевченко, по которому изложение материала происходило последовательно, по новому учебнику материал изучался интервально. Так, например, при изучении натуральных чисел параллельно изучались уравнения, неравенства, объемы и другие темы.

Подчеркнем, что по новой программе тема «Рациональные числа» изучалась в 5-м классе, а по старой программе – в 6-м классе по учебнику А.Н. Барсукова.

Изучение отрицательных чисел как по новой, так и по старой программе происходило за счет индуктивных приемов.

В учебнике Н.Я. Виленкина также создавалась необходимость введения нового множества чисел – множества целых чисел. Отличительной чертой изучения данной темы являлось то, что в учебнике А.Н. Барсукова вводилось определение «абсолютной величины»: «Абсолютная величина числа a есть расстояние точки, изображающей это число на числовой оси от начальной точки» [12, с. 22]. В учебнике Н.Я. Виленкина вводилось понятие «модуль числа»: «Модулем числа называется расстояние от начала отсчета до точки, которой соответствует это число» [40, с. 24].

Отметим, что методические особенности заключались в изучении арифметических действий рациональных чисел. Так, в учебнике А.Н. Барсукова и Н.Я. Виленкина сложение и вычитание рациональных чисел происходило посредством числовой прямой. В качестве методических рекомендаций к учебнику Н.Я. Виленкина предлагалось изучение данной темы посредством векторов. При данном подходе вводились правила сложения и вычитания с использованием понятия вектора: «Для нахождения суммы двух векторов следует к концу первого вектора приложить начало второго вектора. Вектор, соединяющий начало первого вектора с концом второго, будет суммой данных векторов» [139, с. 347].

Умножение рациональных чисел также отличалось в учебниках А.Н. Барсукова и Н.Я. Виленкина: так, в учебнике А.Н. Барсукова правило умножения чисел с разными знаками вводилось индуктивным способом с помощью решения задачи на вычисления температуры, после чего формулировалось правило. В учебнике Н.Я. Виленкина вначале догматически вводилось правило умножения, а после – уже решались задачи на вычисления температуры и т. д., тем самым доказывая введенное правило.

«Алгебра» А.Н. Барсукова (7-8 класс) и «Алгебра» Ю.Н. Макарычева (6-8 класс)

В курсе алгебры центральными темами являлись: «Рациональные числа»; «Тождественные преобразования»; «Уравнения и неравенства»; «Функция». Так же, как и в курсе арифметики, центральные курсы алгебры получили свои методические изменения. Тема «Рациональные числа» была отдельно проанализирована ранее, так как данная тема изучалась в учебнике Н.Я. Виленкина, но не изучалась по учебнику И.Н. Шевченко. Стоит отметить, что материал по новой программе был во многом дополнен, поэтому сравнение происходило только по тем центральным темам, что были и в учебнике А.Н. Барсукова. Рассмотрим методические особенности при изложении центральных тем курса алгебры (таблица 19).

Таблица 19 – Методические различия тем по алгебре

Тема	**А.Н. Барсуков**	**Ю.Н. Макарычев**
Тождественные преобразования	**Определение:** «Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него букв» [12, с. 65].	**Определение:** «Два выражения называются тождественно равными, если все их соответственные значения равны. Равенства, в которых левая и правая части – тождественно равные выражения, называют тождествами» [119, с. 10].
	Сложению и вычитанию многочленов посвящался целый параграф, в котором было четко сформулировано понятие «коэффициенты многочлена», а также сформулированы правила сложения и вычитания одночленов и многочленов.	Сложение и вычитание многочленов изучалось на интуитивном уровне, не формулировались отельные правила приведения подобных слагаемых. Данное понятие вводилось индуктивным способом, на конкретном примере. В параграфе «Тождественные преобразования» рассматривалось преобразование одночленов, но при этом четких правил и определений не формулировалось.
	Правило умножения многочленов формулировалось с помощью распределительного закона умножения, а также группировки одночленов. Данное правило не доказывалось в учебнике, а лишь проверялось на примере с конкретными числовыми значениями.	Правило умножения многочленов вводилось посредством введения новой переменной, а также последующей подстановки в многочлен. Правило умножения доказывалось с помощью вычисления площади прямоугольника, состоящего из других прямоугольников.

Продолжение таблицы 19

	Формулы сокращенного умножения рассматривались в следующем порядке: квадрат суммы; квадрат разности; разность квадратов; куб суммы; куб разности.	Формулы сокращенного умножения рассматривались в следующем порядке: разность квадратов; квадрат суммы; куб суммы; сумма и разность кубов. Стоит отметить, что большое внимание отводилось обратному использованию формул сокращенного умножения, в частности, разложению на множители с помощью разности квадратов.
	Определение: «Алгебраическое выражение, представляющее собой дробь, числитель и знаменатель которой – многочлены, называется алгебраической дробью» [30. с. 124].	**Определение:** «Выражение вида $\frac{a}{b}$ – где буквами a и b обозначены выражения числовые или содержащие переменные, называют дробью» [120, с. 6].
	При изучении основного свойства дроби для алгебраических дробей аксиоматически принималось то, что знаменатель не мог равняться нулю. Соответственно, при сокращении дробей не указывались ограничения, принимаемые переменными: «Если числитель и знаменатель алгебраической дроби разделить на один и тот же многочлен, то получится дробь, тождественно равная данной» [12, с. 128]. Стоить отметить, что в методических рекомендациях основное свойство дроби предлагалось доказать с помощью доказательства теоремы, а также обратной данной: если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $ad=bc$.	При изучении основного свойства дроби использовалось понятие «область допустимых значений», соответственно при сокращении дробей указывались ограничения принимаемых значений переменной: «$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$, где $b\neq 0$; $c\neq 0$» [120, с. 13]. Основное свойство дроби в новом учебнике принималось без доказательства.
	Определение: «$-n$-й (где n – натуральное число) степенью числа a, не равного нулю, считается число, обратное n-й степени основания a» [12, с. 131].	**Определение:** «$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$, где $a\neq 0$ и $n\in N$» [120, с. 39]. Вместе с этим отдельно рассматривались свойства степени с целым показателем, а также

Продолжение таблицы 19

		преобразования степенных выражений с положительными и отрицательными показателями.
	Введение квадратного корня происходило с помощью решения неполного квадратного уравнения, а также рассматривалось как обратное действие действию возведения во вторую степень, после чего использовалось при построении квадратичной функции. Кроме этого, в учебнике А.Н. Барсукова рассматривались только квадратный и кубический корень.	Квадратный корень вводился посредством построения квадратичной функции, а после рассматривался в процессе решения неполного квадратного уравнения. При построении графика функции создавалась необходимость введения нового класса множеств чисел – иррациональных чисел. Стоит также отметить, что в учебнике Ю.Н. Макарычева вводилось понятие «корень *n*-й степени», а также его свойства.
Уравнения и неравенства	**Определение: «**Решить уравнение – значит найти те значения неизвестного, при которых обе части уравнения равны одному и тому же числу» [12, с. 49].	**Определение:** «Решить уравнение – значит найти множество его корней» [119, с. 13].
	Понятие «уравнение» формулировалось в начальной школе. До 7-го класса решение уравнений с одним неизвестным в первой степени сводилось к применению правил из начальной школы по нахождению неизвестных компонентов при определенном арифметическом действии (пример: чтобы найти неизвестное слагаемое, нужно из суммы вычесть известное слагаемое). После чего в 7-м классе рассматривалось понятие «равносильные уравнения», а также формулировались основные свойства уравнения: перенос элементов из одной части в другую; умножение и деление обеих частей уравнения на одно и то же число.	Понятие «уравнение» вводилось в 3-м классе, а также рассматривалось и в 4-м и 5-м классах. До 6-го класса у учащихся постепенно вырабатывались приемы решения уравнений с одним неизвестным в первой степени. При этом, начиная с 4-го класса, поэтапно формулировался алгоритм решения линейных уравнений, формируемых из производимых тождественных преобразований. Так, в начале проверялась верность равенства при конкретных числовых значениях. После изучения распределительного закона умножения вводился элемент приведения подобных слагаемых. На основе конкретных числовых равенств вводились правила о переносе элементов уравнения из одной части в другую,

Продолжение таблицы 19

		а также умножении и делении обеих частей уравнения.
	При решении рациональных уравнений предлагалось выполнять проверку найденных корней уравнения.	Перед решением уравнений рекомендовалось определение области допустимых значений. Стоит отметить, что уравнения по новым учебникам были тесно связаны с изучением функциональной зависимости.
	Решение неполных уравнений вводилось на примере текстовых задач на вычисление площади, по которым составлялись уравнения. С помощью разложения на множители, а также основных свойств уравнений, вводились алгоритмы решения неполных квадратных уравнений.	Схема решения неполных квадратных уравнений вида $x^2 = a$ вводилась посредством построения квадратичной функции при различных значениях a, после чего формулировались правила решения неполного квадратного уравнения данного типа.
	Способы решения полных квадратных уравнений рассматривались в следующем порядке: через дискриминант; графическим способом; по теореме Виета.	Способы решения полных квадратных уравнений рассматривались в следующем порядке: графическим способом; выделением квадрата двучлена; через дискриминант; дискриминант, деленный на 4; по теореме Виета. Стоит отметить, что, в отличие от учебника А.Н. Барсукова, в котором рассматривались отдельно виды неполных квадратных уравнений, в учебнике Ю.Н. Макарычева рассматривались квадратные уравнения общего вида, в том числе полные и неполные.
	Решение неравенств с одной переменной в первой степени, а также и другие типы неравенств, были исключены из программы, неравенства изучались лишь в 9-м классе.	Решение неравенств с переменной по новой программе вводилось с 4-го класса. Следовательно, вводились понятия «числовые промежутки», «числовые интервалы», «двойные неравенства». С помощью функциональной зависимости рассматривались промежутки возрастания и убывания функции,

Продолжение таблицы 19

		соответственно появлялась необходимость в решении различных видов неравенств. С помощью числовых прямых и числовых промежутков вводились и доказывались свойства неравенств, посредством которых решались неравенства с одним неизвестным, а также системы линейных неравенств. По новой программе также рассматривались неравенства второй степени; неравенства и системы неравенств с двумя переменными.
Функция	**Определение:** «Если две переменные величины связаны между собой так, что каждому значению одной из них соответствует определенное значение другой, то говорят, что между этими переменными существует функциональная зависимость» [12, с. 255].	**Определение:** «Соответствие между множеством X и множеством *Y*, при котором каждому элементу множества *X* соответствует один и только один элемент множества *Y*, называется функцией» [119, с. 69].
	Понятие «функция» изучалось в 8-м классе, являясь заключительной главой в изучении алгебры. В данном разделе изучались: функция прямой пропорциональности; линейная функция; квадратичная функция; кубическая функция; функция кубического корня.	Понятие «функция» вводилась в 6-м классе и дополнялось в процессе изучения материала курса алгебры. В курсе алгебры изучались: прямая и обратная пропорциональность; линейная функция; квадратичная функция; последовательности, в частности, арифметическая и геометрическая последовательности; показательная функция; функция корня n-й степени; показательная функция; логарифмическая функция.
	В начале рассматривалась функция прямой пропорциональности, после – линейная функция.	Функция прямой пропорциональности вводилась после введения линейной функции.
	Определение: «Многочлен первой степени относительно аргумента называется линейной функцией этого аргумента» [12, с. 253].	**Определение:** «Функция, которую можно задать формулой вида $y=kx+b$, где x и y – переменные, k и

Продолжение таблицы 19

		b – числа, называется линейной» [119, с. 155].
	Четко сформулированного определения в учебнике не было. Понятие «квадратичная функция» вводилось посредством анализа зависимости между величинами (сторона и площадь квадрата). После введения понятия «трехчлен» авторы формулировали: «Давая x любые значения, будем получать соответствующие значения трехчлена. Значит, трехчлен является функцией аргумента x. Обозначим эту функцию через y: $y = ax^2 + bx + c$» [12, с. 265].	**Определение:** «Функция, которая может быть задана формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется квадратичной» [121, с. 14].
	Кубическая функция и функция кубического корня вводилась по следующей схеме: рассматривалась функция; составлялась таблица со значениями функции и аргумента; по данным таблицы строился график; по графику выделялись свойства функции.	Функции $y = \sqrt[n]{x}$ и $y = x^n$ не ограничивались лишь 3-й степенью. Изучение данных функций происходило в 8-м классе, соответственно у учащихся были накоплены определенные сведения о функциях. Изучение представленных функций происходило по следующей схеме: рассматривалась функция; аналитическим способом выделялись свойства функции; строился график.

Рассмотрев основные методические различия тем по алгебре, можно констатировать, что темы из традиционной программы также получили некоторые преобразования и дополнения. Одной из центральных тем в курсе алгебры являлась тема «Тождественные преобразования». Введение правил и понятий уже опиралось на другие механизмы. Так, понятие «тождество» было переработано, в учебнике Ю.Н. Макарычева получило более научную формулировку, избавившись в тексте от разговорных выражений: «букв» [94].

Приведение подобных слагаемых уже было знакомо учащимся, обучающимся по новой программе, еще в 4 и 5-м классах, так как по программе уже производили первые преобразования выражений с переменными. Соответственно, в учебнике Ю.Н. Макарычева не были сформулированы отдельно правила преобразований сложения и вычитания одночленов. Однако формулирование подобных правил с учетом нового понятия «тождество» также было бы не лишним. В учебнике А.Н. Барсукова отдельно были сформулированы правила при выполнении данных операций с одночленами, а также приведении подобных слагаемых в алгебраических выражениях. Причем правила, что в одном учебнике, что в другом, не отличались [12].

Такая же ситуация была с преобразованием многочленов. При изучении умножения многочленов введение правила, а также его обоснование, различались. Так, в учебнике А.Н. Барсукова применялось правило умножения суммы из 4-5-го классов, а также распределительный закон умножения с использованием группировки слагаемых. На основании данных приемов вводилось правило умножения многочлена на многочлен. Преобразования, приводимые в учебнике А.Н. Барсукова, могли показаться обучающимся слишком сложными из-за количества используемых правил. В свою очередь, в учебнике Ю.Н. Макарычева один из многочленов обозначали за новую переменную и выполняли умножение одночлена на многочлен, после чего выполнялась обратная подстановка с дальнейшим приведением подобных слагаемых. Данные приемы в итоге формулировали единое правило, которое также не отличалось ни по своей сути, ни по своей формулировке [119; 128].

По новой программе большое внимание отводилось на изучение формул сокращенного умножения, а также преобразование выражений с их использованием. Так, в учебнике Ю.Н. Макарычева рассматривались также формулы суммы и разности кубов, кроме этого, отдельно рассматривались случаи, в которых необходимо было воспользоваться обратной формулой сокращенного умножения.

При изучении алгебраических дробей использовались понятия из функциональной зависимости, а именно область допустимых значений. При преобразовании алгебраических выражений, в частности дробно-рациональных уравнений и неравенств, большое внимание уделялось определению области допустимых значений переменной. Данное понятие усиливалось благодаря возрастанию роли функциональной зависимости в курсе, тогда как в учебнике А.Н. Барсукова всего лишь упоминалось о существовании значений переменных, обращающих знаменатель алгебраической дроби в ноль [12; 128].

Преобразования степеней с целым, а также рациональным показателем также было расширено по сравнению с традиционной программой. Рассматривались действия степеней с целыми и рациональными показателями, а также преобразования степенных выражений. Так изучались новые формулы степеней, в частности, переход степени с рациональным показателем к иррациональному виду.

В курсе алгебры также центральное место занимали темы «Уравнения и неравенства» и «Функция». По новой программе данные темы были взаимосвязаны. Так, изучение функций и уравнений в учебнике Ю.Н. Макарычева происходило по следующей схеме: рассматривалась конкретная ситуация или задача, приводящая к изучению функции; формулировалась функция; построение графика; исследование графика функции и выделение свойств функции; использование свойств функции при решении уравнений и неравенств. В учебнике А.Н. Барсукова уравнения изучались обособленно от понятия функции, так как функции изучались в конце 8-го класса, после изучения уравнений. При этом изучение неравенств в данном учебнике не предполагалось [121].

Методика обучению решения уравнений также была изменена, так, алгоритм решения уравнений по новой программе формировался поэтапно, начиная с начальной школы в течение нескольких годов обучения с добавлением новых элементов изучения. Например, в 7-м классе индуктивным способом вводились правила решения уравнений первой степени с одним неизвестным. В учебнике А.Н.

Барсукова вводилось понятие о равносильных уравнениях, а также формулировались правила в виде свойств равносильных уравнений.

Как ранее было отмечено, в учебнике Ю.Н. Макарычева изучение уравнений было связано с изучением функции. Соответственно, при формулировании алгоритма решения уравнения в начале рассматривался график функции, а также использовались свойства функции, после чего уже формулировались позиции по решению уравнения. В учебнике А.Н. Барсукова при формировании алгоритма решения уравнений использовались тождественные преобразования, посредством которых преобразовались уравнения, формируя этапы решения [94].

Понятие «функция» занимало центральное место в теоретико-множественном подходе обновленной программы по математике. Учение о функции, а также видах функций, было намного расширено. Само понятие функции также было преобразовано с помощью понятия «множество». Функциональная зависимость в новом учебнике была расширена, были добавлены новые виды функций: прогрессии; показательная и логарифмическая функция; функция вида $y = \sqrt[n]{x}$. Часть функций уже присутствовала в традиционной программе, но в рамках старшей школы. Изучение функций по новой программе проходило с 6-го класса, дополняясь новыми свойствами [121].

В учебнике Ю.Н. Макарычева, как и в учебнике А.Н. Барсукова, изучались функции, в основном, при помощи исследования графиков функций. Перед обучающимися рассматривалась конкретная ситуация или задача, с помощью которой создавалась необходимость исследовать функцию. После составлялась таблица значений аргумента и функции, по которой происходило построение графика. С помощью анализа графика функции выделялись свойства функции, которые были применимы ко всем функциям рассматриваемого вида. В учебнике Ю.Н. Макарычева свойства некоторых функций на последнем году обучения уже формулировались не посредствам графика, а с помощью аналитического метода [12].

«Геометрия» Н.Н. Никитина (6-8 класс) и «Геометрия» А.Н. Колмогорова (6-8 класс)

Теоретико-множественный подход главным образом повлиял на курс геометрии, по новой программе он опирался на геометрические преобразования. Многие понятия излагались по-новому, соответственно, была преобразована и методика преподавания материала из традиционного курса. Рассмотрим основные методические различия в курсе геометрии в учебнике Н.Н. Никитина и А.Н. Колмогорова (таблица 20).

Таблица 20 – Методические особенности геометрии

Тема	**Н. Н. Никитин**	**А.Н. Колмогоров**
Основные понятия	**Определение:** «Окружностью называется кривая замкнутая линия на плоскости, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от одной точки; эта точка называется центром окружности» [150, с. 29]	**Определение:** «Множество всех точек плоскости, находящихся на положительном расстоянии r от данной точки, лежащей в этой плоскости, называется окружностью» [80, с. 5].
	В данной теме учебника рассматривались понятия «смежные углы»; «вертикальные углы» и другие начальные сведения.	Большинство начальных геометрических сведений, в том числе «смежные углы»; «вертикальные углы», были рассмотрены в 4-5-х классах.
	В учебнике аксиоматика заменялась на свойства прямой; свойства плоскости и т. д., которые принимались без доказательства.	В учебнике аксиоматика была основана на группе аксиом Гильберта: принадлежности; расстояния; порядка.
Параллельность прямых	**Аксиома:** «Через точку, взятую вне данной прямой, можно провести **только одну** прямую, параллельную этой прямой» [150, с. 77]. Данная аксиома была характерна только для евклидовой плоскости, различия между геометрическими аксиоматиками в большей степени расходились, начиная с 5-го постулата Евклида о параллельности прямых.	**Аксиома:** «Через данную точку проходит не более одной прямой, параллельной данной прямой» [80, с. 70]. Данная аксиома была характерна уже для «абсолютной» геометрии. Данная формулировка аксиомы являлась верной как для евклидовой плоскости, так и неевклидовой.

Продолжение таблицы 20

	Определение: «Две фигуры называются симметричными относительно некоторой прямой, если при перегибании плоскости чертежа по этой прямой они совмещаются» [150, с. 44].	**Определение:** «Фигура, симметричная фигуре *Ф* относительно оси *l*, есть множество всех точек, симметричных точкам фигуры *Ф* относительно этой оси» [80, с. 41].
	Теорема о сумме углов в треугольнике доказывалась с помощью накрест лежащих углов.	Теорема о сумме углов в треугольнике доказывалась посредством вертикальных углов.
	Признаки параллельности прямых: 1. Если при пересечении двух прямых третьей внутренние накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны. 2. Если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны, то эти две прямые параллельны. 3. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна $2d$, то эти две прямые параллельны.	**Признаки параллельности прямых:** 1. Если две прямые центрально симметричны, то они параллельны. 2. Если две прямые плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны. 3. Если какие-либо два соответственных угла при пересечении двух прямых третьей конгруэнтны, то эти две прямые параллельны.
Треугольники	Признаки равенства треугольников доказывались с помощью наложения вершин треугольников, а также совмещения его сторон. После того, как фигуры полностью совмещались, полагалось, что треугольники равны.	Все признаки конгруэнтности треугольников формулировались после соответствующих геометрических построений, а также в процессе решения задач на построение.
	Свойства равнобедренного треугольника доказывались путем построения треугольника, а также последующего перегиба листа, на котором был построен равнобедренный треугольник, и последующего совмещения его сторон.	Свойства равнобедренного треугольника доказывались с помощью теорем о конгруэнтности треугольников.
	Теорема Пифагора доказывалась на основе площадей квадратов.	Теорема Пифагора доказывалась на основе подобных треугольников, а именно через свойства средних геометрических между отрезками.

Продолжение таблицы 20

Четырехугольники	Свойства параллелограмма доказывались с помощью равенства треугольников. Про центр симметрии параллелограмма сообщалось позднее в виде дополнительных сведений.	Свойства параллелограмма доказывались с помощью теоремы о центре симметрии параллелограмма. Свойства параллелограмма являлись следствиями данной теоремы.
	Свойства диагоналей ромба доказывались с помощью свойств равнобедренного треугольника. О том, что ромб имеет центр симметрии, сообщалось в конце в виде дополнительных сведений.	Перед изучением свойств ромба вводилась теорема об оси ромба, на основе которой доказывались свойства ромба в виде следствий теоремы.
	Теорема о средней линии трапеции доказывалась с помощью дополнительных построений дополнительных треугольников, а также признаков равенства треугольников.	Теорема о средней линии трапеции доказывалась с помощью теоремы Фалеса.
Подобие	**Определение**: «Два одноименных многоугольника называются подобными, если углы одного из них соответственно равны углам другого, а сходственные стороны многоугольников пропорциональны» [150, с. 164].	**Определение:** «Если фигуру Φ можно отобразить на фигуру Φ_1 так, что для любых точек X и Y первой фигуры отношение расстояния $\|X_1Y_1\|$ между их образами к расстоянию $\|XY\|$ между самими точками X и Y равно одному и тому же числу $k > 0$, то говорят, что фигура Φ_1 подобна фигуре Φ с коэффициентом подобия k» [81, с. 92].
	Признаки подобия треугольника изучались в следующем порядке: по двум углам; по двум сторонам и углу; по трем сторонам.	Признаки подобия треугольника изучались в следующем порядке: по трем сторонам; по двум углам; по двум сторонам и углу.
	Признаки подобия доказывались посредствам признаков равенства треугольников.	Признаки подобия доказывались посредством гомотетии.
	Определение: «Синусом угла A называется отношение катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе» [150, с. 175].	**Определение:** «Обозначим через P_0 точку с координатами (1; 0). Поворот R_α на угол α вокруг начала координат отображает точку P_0 на точку, которая, как и точка P_0, лежит на единичной окружности.

Продолжение таблицы 20

Тригонометрические функции	Данное определение было сформулировано на основе соотношений сторон в прямоугольном треугольнике. Кроме того, как в данной теме давались определения синуса, косинуса и тангенса, в форме отношений сторон, понятие тригонометрической функции глубже не раскрывалось.	Координаты x_α и y_α точки P_α имеют специальные названия: ордината точки P_α называется синусом угла α, абсцисса точки P_α называется косинусом угла α» [82, с. 13]. Данное определение было сформулировано на основе геометрических преобразований плоскости, а именно поворота. В данной теме формулировались основные тригонометрические тождества, а также теоремы синусов и косинусов.

Курс геометрии получил наибольшее количество преобразований, так как помимо внедрения теоретико-множественного подхода была создана аксиоматика, по которой строился весь курс геометрии. А.Н. Колмогоров пытался приблизиться к западному формализму в изложении материала по геометрии, чтобы в школьном курсе геометрии каждая теорема и определение опиралась на наименьшее количество аксиом. Вследствие этого ряд теорем и свойств из традиционного курса рассматривались уже другими способами [91].

Реформа основного общего математического образования изменила структуру изучения материала по математике, соответственно, ряд вопросов из геометрии, таких как «вертикальные углы»; «смежные углы», рассматривались в учебнике Н.Я. Виленкина, в отличие от учебника Н. Н. Никитина. Поэтому при изучении материала из учебника А.Н. Колмогорова, в частности при знакомстве с основными аксиомами, обучающиеся имели уже определенный теоретический уровень знаний [94].

Большинство понятий, даже основных, были преобразованы с использованием понятия «множество», так, на примере понятия «окружность» можно сравнить преобразование формулировок, которые стали более трудными для восприятия обучающимися. Данное преобразование было связано со стремлением создать единый предмет, сократив дифференциацию математики.

Большое значение имело переосмысление аксиомы параллельности прямых, так как измененная формулировка являлась верной не только в евклидовой геометрии, но также и в геометрии Лобачевского, и в геометрии Римана, которые изучались в рамках факультативных занятий. Формулировка, которая была дана в учебнике Н.Н. Никитина, противоречила неевклидовому пространству (космическому пространству) и требовала определенных корректировок [195].

В новой программе геометрии усилилась роль геометрических преобразований (изометрических отображений), в том числе и симметрий. С помощью геометрических преобразований множеств точек доказывались теоремы и свойства из традиционного курса, так, например, в таблице 20 приведены примеры теоретического материала, раскрывающиеся новым подходом. Так, свойства параллелограмма доказывались на основе симметрии множества точек плоскости, что являлось видом изометрического отображения точек плоскости на себя. Как ранее отмечалось, авторы реформы полагали, что понятия «отображение» и «функция» являлись словами синонимами, находившими отражение в алгебре и в геометрии. Как понятие «функция» занимало центральное место при построении курса, так и понятие «отображение» занимало особое место в построении курса геометрии [38].

В новом учебнике по геометрии расширялось понятие «отображение», раскрывалась суть данного понятия посредством теоретико-множественного подхода, а также его видов. По новой программе изучались новые понятия, дополняющие известные виды отображений, на основе которых доказывался дальнейший теоретический материал, так, например, с помощью понятия «гомотетия» доказывались признаки подобия треугольников.

С помощью понятия «поворот», а также «композиция поворотов» раскрывались тригонометрические функции. В таблице 20 представлено сравнение определений понятий «синус». В учебнике Н.Н. Никитина представлено определение в рамках прямоугольного треугольника, а в учебнике А.Н. Колмогорова вводилось определение в ином контексте, являющемся пропедевтикой к усвоению тригонометрии в старшей школе. При этом представленная формулировка, отличающаяся высоким научным уровнем, маловероятно усваивалась обучающимися 8-го класса, в отличие от формулировки Н.Н. Никитина. Подобное определение А.Н. Колмогорова использовалось в дальнейшем при изучении основного тригонометрического тождества, углубляя взаимосвязь между тригонометрическими функциями [82; 85].

Проанализировав различные методические пособия по математике 1970-х годов, а также сравнив их с методическими пособиями 1960-х годов, можно констатировать, что методика преподавания была преобразована. Кроме изменений в структуре и очередности подачи материала, привычные учителям формулировки понятий, теорем и их способов доказательств были модернизированы. Учет новых методических особенностей при изучении тем как из старого курса, так и нового, требовали от учителя регулярного саморазвития и самообразования.

Так, вместе с появлением новых трактовок и подходов к изучению понятий, новая структура урока, а также новые формы работы, предлагаемые учебными пособиями, требовали от учителей преобразования в занятиях. Вся эта работа предполагало особую методическую поддержку, которую учителя, особенно в регионах и сельской местности, не могли получить.

Так, методическое пособие «Методика преподавания математики» Ю.М. Колягина, В.А. Оганесяна, В.Я. Саннинского, Г.Л. Луканкина было выпущено в большей степени для студентов и выпускников педагогических вузов. Курсы повышения квалификации для уже действующих учителей были сформированы лишь в 1972 году, когда реформа уже осуществлялась два года. Соответственно, единственным доступным источником того, как нужно организовывать работу на уроке, являлось пособие «В помощь учителю», которое прилагалось к учебнику [94].

Проанализировав структуру данного методического пособия, можно констатировать, что данное приложение к учебнику помогало учителю в организации учебной деятельности с учетом новых методических особенностей. Но, однако, общие советы и рекомендации в полной мере не могли заменить качественную переподготовку учителя, а также переосмысление состояния математики и степени преобразования ее преподавания.

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

1. Реформирование математического образования в СССР в 1960–70-е годы повысило его научность. Программы и учебники были обновлены в соответствии с государственным заказом, направленным на модернизацию содержания образования и усиление политехнического образования. Это потребовало разработки новых учебных материалов и переподготовки педагогов.

2. Качество осуществленной реформы математического образования в СССР было установлено на основе анализа программ, учебников и методических аспектов преподавания математики 1960-х и 1970-х годов. Это позволило выявить особенности изменений, внесенных реформой.

3. Анализ программ по математике 1970-х годов показал, что увеличение срока основного общего образования позволило добавить новые темы и изучать некоторые темы старшей школы. В алгебре активно применялся функционально-теоретический подход, а в геометрии – геометрические отображения.

4. Курс «Математика» был подготовительным этапом для изучения теории множеств и геометрии. Так как понятия из теоретико-множественного подхода имели высокую степень абстракции, большинство определений формулировались индуктивно. Этот подход не только добавлял новые темы, но и менял подход к изучению существующих. Например, классификация чисел рассматривалась как подмножества множеств действительных чисел.

5. Помимо внедрения понятий из теории множеств, курс математики стал более научным: в нем повысилась роль дедуктивного метода. При изучении темы «Натуральные числа» совместно с арифметическими действиями и их свойствами стали изучаться «буквенные выражения», «уравнения», «неравенства». Изменилось понимание понятия «десятичная дробь»: по новой программе подчеркивалась важность изучения десятичных дробей с помощью метрических измерений, сама же десятичная дробь представлялась как новый способ записи числа.

6. Понятия из теории множеств курса «Математика» начали изучать уже в 5-м классе. Например, с помощью понятия «множество» вводились понятия «НОД» и «НОК», а также использовалась логическая символика. Однако такие сложные

абстрактные определения было трудно понять ученикам, поэтому авторы формулировали их индуктивно, теряя четкость и строгость.

7. Учебно-дидактическим обеспечением курса «Математика» занимался авторский коллектив под руководством А.И. Маркушевича. В учебнике материал был изложен лаконично, а упражнения не только закрепляли знания, но и обучали. В отличие от задачника 1960-х годов учебник содержал больше упражнений для отработки знаний и навыков, включая разделы «Для домашней работы» и «Задания для повторения». Это позволяло учителю дифференцировать работу класса.

8. Курс «Алгебра» испытал большее влияние теоретико-множественного подхода по сравнению с курсом «Математика». Центральными линиями курса стали функциональная линия, уравнения и неравенства, тождественные преобразования. Особое внимание уделялось функциональной линии, поскольку понятие «функция» строилось на теоретико-множественном подходе. Свойства уравнений и неравенств изучались после определенного вида функции. Это усиливало связь уравнений и неравенств с теоретико-множественным подходом. С помощью функциональной линии рассматривались новые темы: решения неравенств различных типов, арифметическая и геометрическая последовательности. Из старшей школы были добавлены логарифмические и показательные функции.

9. Учебники по алгебре разрабатывал авторский коллектив А.Н. Макарычева. Учебные пособия, как и учебники Н.Я. Виленкина, были модернизированы: учебник и задачник объединили в одно пособие. В учебнике был большой объем упражнений, разделенных на задания для закрепления, домашней работы и повторения материала. Стиль изложения теоретического материала стал более научным, формулировки сопровождались обоснованием. Свойства и теоремы доказывали синтетическим методом или через исследование заданной функции.

10. В курсе «Геометрия» расширили понятие движения и внедрили основы векторной алгебры. С помощью симметрии и других видов преобразований плоскости доказывали свойства из традиционного курса геометрии, а также раскрывали новые темы. Поворот позволил ввести тригонометрические функции: синус и косинус. Аксиома параллельности прямых была переосмыслена для

использования в неевклидовых плоскостях. Это модернизировало курс в соответствии с последними тенденциями развития науки.

11. Учебно-методическую литературу по геометрии разрабатывал А.Н. Колмогоров. Изначально учебники издавались отдельно для каждого класса, но в 1970-х годов их объединили в пособие по планиметрии. В учебнике было много заданий на вычисление и доказательство. Теоретический материал оказался сложным для восприятия из-за использования геометрических преобразований. Уровень научности был сопоставим с уровнем высшей школы, что не имело смысла для школы. Необходимость баланса между доступностью изложения и научным уровнем была достигнута в более поздних изданиях.

12. В результате реформы основного общего математического образования были переосмыслены некоторые вопросы, связанные с учебником, а также сформированы тенденции развития отечественного учебника по математике:

Расширение функционала школьного учебника. Авторы – коллективы ученых и методистов – переосмыслили принципы и функции учебника. Исследования изменили понимание роли учебника: он стал не просто источником информации, но и образовательной книгой, задающей методы для усвоения знаний.

Переработка теоретического текста. Текст в школьных учебниках 1960-х годов был полностью переписан. В учебниках 1970-х формулировки стали более четкими и лаконичными, была устранена излишняя многословность, исключены разговорные обороты.

Интеграция учебника и задачника. Учебник по математике перестал быть сборником правил и определений и стал дидактической единицей, в которой отражались все компоненты содержания обучения. Реформирование 1970-х годов добилось единства теоретического материала с системой закрепления, что позволило добиться соответствия формулировок в объяснительном тексте и упражнениях.

Обучающая функция упражнений. Упражнения в новых учебниках по математике не только закрепляли изученный материал, но и обучали. Частные случаи теорем и их следствия были представлены в виде упражнений, которые нужно было доказать. В процессе выполнения таких упражнений обучающиеся открывали новое теоретическое знание.

Наглядность. В новых учебниках по программе стало больше наглядных чертежей и рисунков графиков, так как в новом курсе расширялось учение о функции и геометрических преобразованиях.

Реформа основного общего математического образования содержала ряд серьезных недостатков. Несвоевременное обучение учителей привело к низким образовательным результатам учеников. Качество учебников, абстрактность материала и отсутствие учета возрастных особенностей также негативно сказались на результате. Новую программу, учебники и методику не смогли освоить ни ученики, ни учителя.

После анализа результатов модернизации основного общего математического образования 1970-х годов были пересмотрены подходы к организации образовательной реформы. В начале 1980-х годов в основу реформирования общего математического образования легли положения реформы 1970-х. Большинство нововведений из этой реформы включили в учебные программы 1980-х годов. На основе учебно-методической литературы 1970-х были созданы новые учебники авторскими коллективами, среди которых А.В. Погорелов, А.Д. Александров, С.М. Никольский и другие. Реформа общего математического образования 1970-х годов имела большое значение, определив направления его развития.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В 1970-е годы в СССР происходила масштабная реформа общего математического образования, инициированная научно-педагогическим сообществом и стимулируемая зарубежными подходами, особенно теоретико-множественным. А.И. Маркушевич сыграл ключевую роль во внедрении этого подхода, а под руководством А.Н. Колмогорова была разработана новая учебная программа, призванная повысить уровень математической подготовки школьников для поступления в технические вузы.

2. Повышение математической подготовки обучающихся планировалось осуществить на основе возрастания научности излагаемого теоретического материала, а также использования в большей степени дедуктивного стиля изложения объяснительного текста. Данные позиции в модернизации общего математического образования достигались в результате внедрения теоретико-множественного подхода в школьную систему образования математики. Понятия из теории множеств, применяемые математиками в научной деятельности, призваны были повысить научность изложения материала, что, как следствие, должно было подготовить учеников к восприятию более сложных и абстрактных понятий в высших технических учреждениях.

3.Реформа включала изменение структуры и содержания курса, что требовало создания новых учебников и методических материалов, а также переподготовки педагогов. Программа была обсуждена и утверждена в 1967–1968 годах, ее поэтапное внедрение осуществлялось с 1970/1971 учебного года поэтапно. Рассматривая процесс реформирования, можно выделить следующую периодизацию:

Концептуально-программный период реформирования содержания школьного математического образования охватывает 1967–1969 годы. В данный период происходила подготовка обоснования идеи реформирования математического образования. На базе диссертационных исследований ученых создавалась учебная программа по математике.

Апробационно-внедренческий период включает 1970–1976 годы. В данный период происходило внедрение реформы. Содержание программ и учебных пособий корректировалось в течение всего периода.

Рефлексивный период охватывает 1977–1980–е годы. В данный период были выявлены недостатки реформы математического образования, а также разработана «контрреформа», которая должна была преодолеть критическое состояние математического образования.

4. В рамках парадигмы классической математики доминировал знаниевый подход к математическому образованию, согласно которому внимание уделялось овладению основными математическими знаниями и их практическому применению. Основное содержание образования сосредоточивалось на развитии навыков вычислений и пространственного мышления. В рамках классической математики основной задачей математического образования было подготовить учащихся к практической деятельности: научить их пользоваться инструментами и приборами для измерений, таблицами, справочниками, графиками и логарифмическими линейками для выполнения вычислений.

5. В научной (теоретико-множественной) парадигме главной целью стало развитие понятийного мышления. Ученики учились использовать общенаучные методы познания, повышали теоретический уровень понимания действительности и осваивали умение выделять проблемы, формулировать гипотезы и доказывать их. Акцент делался на мышление и исследования, а навыки элементарной математики были второстепенными.

6. Содержание и структура учебной программы по математике в процессе реформы были изменены, так как срок обучения в основной школе был увеличен, ряд центральных тем из арифметики, алгебры и геометрии изучались раньше. Рассматривая новую учебную программу по математике, можно отметить, что понятия из теории множеств подавались «дозированно» и в небольших концентрациях. Разницу со старой программой составляла измененная структура материала курса, а также количество часов, отводимых на изучение определенных тем.

7. В процессе реформы математического образования были переосмыслены функции учебника математики. Ранее он рассматривался как инструмент для представления учебного контента, но после реформы стал массовым образовательным изданием, которое не только излагает предмет, но и предлагает методы, необходимые для усвоения знаний. Так, реформирование математического образования смогло сформировать тенденции развития отечественного учебника по математике: устранение многословности и усиление научности теоретического материала; интеграция учебника и задачника; обучающая функция упражнений; усиление роли наглядности чертежей и графиков.

8. В целом, реформа общего математического образования 1970-х годов кардинально изменила систему обучения математике. В этом процессе переосмыслялись многие элементы содержания образования, внедрялись новые педагогические методики и обновлялись учебные пособия. Вместо предмета «Арифметика» был введен предмет «Математика», что стало основой для дальнейшего развития учебных программ и методов преподавания. Новые темы, отражающие последние достижения науки, добавлялись в программу, обеспечивая модернизацию учебного процесса.

9. Реформа математического образования 1970-х годов сформировала ряд важных стратегических и перспективных тенденций по развитию школьного курса математики: реформа смогла существенно усилить элементы математического анализа, а также внедрить основы комбинаторики и теории вероятности в школьный курс; построение школьного курса математики происходило с межпредметной взаимосвязью с другими дисциплинами, при этом дисциплина связывалась одной общей концепцией на всех уровнях образования; развитие сети специализированных школ с углубленным изучением профильных предметов, а также внедрение факультативных занятий являлись предпосылками к дифференциации обучения; внедрение основ работ с ЭВМ и программирование в школьный курс математики заложило основу для создания отдельной дисциплины «Информатика и ИКТ».

10. Выполненное исследование не исчерпало всей возможной проблематики. В качестве перспективных линий дальнейших исследований определим следующие: изучение процесса реформирования математического образования в начальной и старшей школе периода 1960–1980-х годов; характеристика последствий реформирования математического образования и его влияние на курс «ИКТ» в период 1980–1990-х годов; перспективы концептуального развития школьного математического образования при помощи теоретико-множественного подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов, А.М. Великий отечественный мир, или Колмогоровский проект XXI века: книга Александра Абрамова и воспоминания о нем / А.М. Абрамов; под ред. А.С. Русакова, Н.Г. Пучковой. – СПб.: Образовательные проекты, 2016. – 616 с.

2. Абрамов, А.М. О ситуации с математическим образованием в средней школе (1978–2003) / А.М. Абрамов. – М: ФАЗИС, 2003. – 72 с.

3. Алексеев, А.С. Новочеркасский политехнический институт / А.С. Алексеев, И.Г. Вяльцева // Математика в школе. – 1979. – № 1. – С. 36-38.

4. Алимов, Ш.А. Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ / Ш.А. Алимов, В.П. Моденов // Математика в школе. – 1971. – № 1. – С. 55-58.

5. Андронов, И.К. Арифметика: пособие для средней школы / И.К. Андронов, В.М. Брадис. – М.: Учпедгиз, 1957. – 304 с.

6. Андронов, И.К. Полвека развития школьного математического образования в СССР / И.К. Андронов. – М.: Просвещение, 1967. – 180 с.

7. Апухтина, Н.Д. Некоторые замечания о проекте программы по математике для средней школы / Н.Д. Апухтина, Л.А. Тимофеев, П.Е. Альперович, К.И. Новоченко, Л.М. Ивченко // Математика в школе. – 1967. – № 3. – С. 37-38.

8. Арнольд, В.И. Математическая дуэль вокруг Бурбаки / В.И. Арнольд // Вестник РАН. – 2002. – Т. 72. – № 3. – С. 245-250.

9. Арнольд, И.В. Теоретическая арифметика: учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов / И.В. Арнольд. – М.: Учпедгиз, 1938. – 480 с.

10. Ашкинузе, В.Г. О перестройке программ по математике в свете новых задач средней школы / В.Г. Ашкинузе, В.И. Левин, А.Д. Семушкин // Математика в школе. – 1959. – № 1. – С. 40-51.

11. Банникова, Н.В. Домашнее задание... семье / Н.В. Банникова // Семья и школа. – 1978. – № 12. – С. 14-15.

12. Барсуков, А.Н. Алгебра: учебник для 6–8 классов / А.Н. Барсуков; при участии И.Б. Вейцмана; под ред. С.И. Новоселова. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Учпедгиз, 1961. – 296 с.

13. Барсуков, А.Н. О новом учебнике по алгебре / А.Н. Барсуков // Математика в школе. – 1956. – № 3. – С. 5-8.

14. Башмаков, М.И. О приемных экзаменах по математике в Ленинградском университете / М.И. Башмаков, С.М. Ермаков, В.С. Сабанеев // Математика в школе. – 1969. – № 2. – С. 24-26.

15. Беденко, Н.К. О переходе на новые программы по математике первых курсов средних профтехучилищ / Н.К. Беденко, Н.М. Райский, С.И. Шварцбурд // Математика в школе. – 1975. – № 4. – С. 38-40.

16. Беликова, И.В. О некоторых результатах работы шестых классов по новой программе в 1972/73 учебном году / И.В. Беликова, Н.А. Ермолаева, З.И. Моисеева // Математика в школе. – 1973. – № 4. – С. 13-19.

17. Белоногова, Г.М. Об экзаменах в педагогические институты РСФСР / Г.М. Белоногова, М.М. Чернецов / Математика в школе. – 1975. – № 3. – С. 56-58.

18. Бескин, Н.М. Об учебнике арифметики / Н.М. Бескин / Математика в школе. – 1957. – № 4. – С. 57-77.

19. Богуславский, М.В. Инновационный потенциал разработки теории содержания образования и образовательных технологий (в отечественной педагогике второй половины XX века): монография / М.В. Богуславский. – М.: ИТИП РАО, 2008. – 130 с.

20. Богуславский, М.В. Историко-педагогическая экспертиза инноваций в образовании: научные основы: монография / М. В. Богуславский. – М.: ИСРО РАО, 2015. – 118 с.

21. Богуславский, М.В. История педагогики: методология, теория, персоналии: монография / М.В. Богуславский. – М.: ИТИП РАО, Издательский центр ИЭТ, 2012. – 436 с.

22. Богуславский, М.В. Методология, содержание и технологии образования (историко-педагогический контекст): монография / М.В. Богуславский. – М.: Научная книга, 2007. – 236 с.

23. Богуславский, М.В. Развитие общего среднего образования: проблемы и решения: монография / М.В. Богуславский. – М.: ИТПиМИО, Фонд знаний «Ломоносов», 1994. – 182 с.
24. Богуславский, М.В. Стратегии реформирования и модернизации российского образования в первой трети XX века / М.В. Богуславский, К.Ю. Милованов, А.В Кудряшев. – М.: Институт стратегии развития образования Российской академии образования, 2017. – 170 с.
25. Богуславский, М.В. Модернизация российского образования: проблемы и решения / М.В. Богуславский, К.Е. Сумнительный. – М.: Министерство образования МО, 2004. – 56 с.
26. Богуславский, М.В. Исторический контекст модернизационных процессов в российском и зарубежном образовании / М.В. Богуславский, С.В. Куликова // Психолого-педагогический поиск. – 2014. – № 3 (31). – С. 128-133.
27. Болтянский, В.Г. О содержании курса математики в средней школе / В.Г. Болтянский, Н.Я. Виленкин, И.М. Яглом // Математическое образование. – 1959. – № 4. – С. 131-143.
28. Болтянский, В.Г. Геометрия в старших классах средней школы / В.Г. Болтянский, И.М. Яглом // Математика в школе. – 1969. – № 4. – С. 9-22.
29. Болтянский, В.Г. Геометрия: для 9 класса средней школы / В.Г. Болтянский, И.М. Яглом. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1964. – 128 с.
30. Бордовская, Н.В. Доказательство и аргументация в педагогическом исследовании / Н.В. Бордовская, Е.А. Кошкина // Педагогика. – 2021. – Т. 85. – № 12. – С. 5-13.
31. Боц, В.М. К вопросу о модернизации преподавания математики в V–VI классах: автореф. дис. ... канд. пед. наук / В.М. Боц. – М., 1966. – 16 с.
32. Бруй, И.Н. Гомельский государственный педагогический институт / И.Н. Бруй // Математика в школе. – 1980. – № 3. – С. 41-42.
33. Бурбаки, Н. Теория множеств / Н. Бурбаки; пер. с фр. Г.Н. Поварова, Ю.А. Шихановича; под ред. В.А. Успенского. – 2-е изд. – М.: Либроком, 2010. – 456 с.

34. Вайнштейн, М.П. Об итогах вступительных экзаменов по математике в техникумы / М.П. Вайнштейн, А.Т. Рогов // Математика в школе. – 1977. – № 1. – С. 59-61.

35. Вейц, Б.Е. Школьный курс математики / Б.Е. Вейц // Советская педагогика. – 1968. – № 3. – С. 42-44.

36. Величественная программа строительства коммунизма // Математика в школе. – 1959. – № 1. – С. 1-4.

37. Веретенникова, Е.В. МГПИ им. В.И. Ленина / Е.В. Веретенникова // Математика в школе. – 1981. – № 2. – С. 47-49.

38. Вернер, А.Л. А.Д. Александров и школьный курс геометрии / А.Л. Вернер // Математические структуры и моделирование. – 2012. – № 25. – С. 18-38.

39. Виленкин, Н.Я. Математика: учебник для 4-го класса средней школы / Н.Я. Виленкин, К.И. Нешков, С.И. Шварцбурд, А.Д. Семушин, А.С. Чесноков, Т.Ф. Нечаева; под ред. А.И. Маркушевича. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1977. – 239 с.

40. Виленкин, Н.Я. Математика: учебник для 5-го класса средней школы / Н.Я. Виленкин, К.И. Нешков, С.И. Шварцбурд, А.Д. Семушин, А.С. Чесноков, Т.Ф. Нечаева; под ред. А.И. Маркушевича. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 1974. – 245 с.

41. Виленкин, Н.Я. Об учебнике математики для IV класса / Н.Я. Виленкин, К.И. Нешков, С.И. Шварцбурд // Математика в школе. – 1975. – № 3. – С. 36-40.

42. Виленкин, Н.Я. К преподаванию математики в IV классе по новой программе / Н.Я. Виленкин, К.И. Нешков, С.И. Шварцбурд, А.С. Чесноков, В.Н. Рудницкая // Математика в школе. – 1970. – № 3. – С. 26-34.

43. Виленкин, Н.Я. Из пробного учебника «Математика» для V класса под редакцией Маркушевича А.И. / Н.Я. Виленкин, К.И. Нешков, С.И. Шварцбурд, Д.Д. Семушин, А.С. Чесноков, Т. Д. Нечаева // Математика в школе. – 1969. – № 1. – С. 30-36.

44. Виленкин, Н.Я. Равенства, тождества, уравнения, неравенства / Н.Я. Виленкин, С.И. Шварцбурд // Математика в школе. – 1970. – № 4. – С. 4-11.

45. Виленкин, Н.Я. Структура и некоторые методические особенности учебника «Математика IV класс». Неравенства / Н.Я. Виленкин, С.И. Шварцбурд // Математика в школе. – 1970. – № 2. – С. 38-42.

46. Владимиров, В.С. О школьном математическом образовании / В.С. Владимиров, А.Н. Тихонов, Л.С. Понтрягин // Математика в школе. – 1979. – № 3. – С. 12-14.

47. Всероссийский съезд учителей, Москва, 6–9 июля 1960 г.: стеногр. отчет.– М.: Учпедгиз, 1961. – 587 с.

48. Гапонцев, В.Л. Язык описания структуры содержания образования: возможности современной математики / В.Л. Гапонцев, В.А. Федоров, М.Г. Гапонцева // Педагогический журнал Башкортостана. – 2018. – № 5 (78). – С. 75-94.

49. Гапонцев, В.Л. Взгляд на проблему общего кризиса образования через призму опыта истории науки. Часть II. Структура содержания общего образования / В.Л. Гапонцев, В.А. Федоров, Е.М. Дорожкин // Образование и наука. – 2021. – Т. 23. – № 1. – С. 11-43.

50. Глебов, А.А. Целостные педагогические системы: историко-теоретическое исследование / А.А. Глебов. – Волгоград: Перемена, 2010. – 89 с.

51. Гнеденко, Б.В. О воспитании учителя математики / Б.В. Гнеденко // Математика в школе. – 1964. – № 6. – С. 8-20.

52. Гнеденко, Б.В. О перспективах математического образования / Б.В. Гнеденко // Математика в школе. – 1965. – № 6. – С. 2-11.

53. Гнеденко, Б.В. Итоги открытого конкурса на учебники по математике / Б.В. Гнеденко, И.С. Петраков // Математика в школе. – 1965. – № 2. – С. 4-7.

54. Гуль, С. М. Первый опыт проведения факультативных занятий по математике в школах Москвы / С.М. Гуль // Советская педагогика. – 1968. – № 4. – С. 56.

55. Гурвиц, Ю.О. Систематический курс по геометрии / Ю.О. Гурвиц, Р.В. Гангнус. – 3-е изд. – Киев, 1935. – 199 с.

56. Гусев, В.А. «Абитуриент–77» / В.А. Гусев // Математика в школе. – 1977. – № 2. – С. 37-38.

57. Джуринский, А.Н. «Технологическая» тенденция во французской педагогике / А.Н. Джуринский // Народное образование. – 1973. – № 7. – С. 95-98.

58. Днепров, Э.Д. Современная школьная реформа в России / Э.Д. Днепров. – М.: Наука, 1998. – 464 с.

59. Днепров, Э.Д. Четвертая школьная реформа в России / Э.Д. Днепров. – М.: Интерпракс, 1994. – 134 с.

60. Добудько, Т.В. Развитие школьной математики в СССР как предпосылка современного состояния российского математического образования / Т.В. Добудько, И.В. Тюжина // Теория и практика общественного развития. – 2013. – № 10. – С. 190-193.

61. Дорофеев, Г.В. Математический факультет МГПИ имени В.И. Ленина / Г.В. Дорофеев, Л.Я. Куликов // Математика в школе. – 1970. – № 2. – С. 66-71.

62. Дудницын, Ю.П. Из опыта проведения устного экзамена по геометрии в восьмых классах школ РСФСР в 1975 г. / Ю.П. Дудницын, Н.С. Прокофьева // Математика в школе. – 1976. – № 1. – С. 35-42.

63. Дуничев, К.И. Московский государственный педагогический институт им. В.И. Ленина / К.И. Дуничев // Математика в школе. – 1980. – № 3. – С. 39-41.

64. Дуничев, К.И. Московский государственный педагогический институт им. В.И. Ленина / К.И. Дуничев // Математика в школе. – 1987. – № 1. – С. 38-39.

65. Дьедонне, Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне; пер. с англ. И.А. Вайнштейна. – М.: Мир, 1964. – 430 с.

66. Елизаветина, Н.В. МГПИ им. В.И. Ленина / Н.В. Елизаветина, М.М. Чернецов // Математика в школе. – 1982. – № 1. – С. 51-53.

67. Елизаветина, Н.В. МГПИ им. В.И. Ленина / Н.В. Елизаветина // Математика в школе. – 1978. – № 1. – С. 47-50.

68. Ермаков, С.М. Ленинградский университет / С.М. Ермаков, В.С. Сабанеев // Математика в школе. – 1970. – № 2. – С. 64-66.

69. Ермаков, С.М. Ленинградский университет / С.М. Ермаков, В.С. Сабанеев // Математика в школе. – 1971. – № 2. – С. 57-61.

70. Загвязинский, В.И. Методологический анализ проблемы эффективности обучения / В.И. Загвязинский // Советская педагогика. – 1977. – № 7. – С. 136-138.

71. Зарисский, О. Коммутативная алгебра /О. Зарисский, П. Самюэль. – М.: Просвещение, 1963. – 372 с.

72. Золотухин, Ю.П. Теоретико-множественная концепция и школьный курс математики / Ю.П. Золотухин // Математическое образование: современное состояние и перспективы. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2019. – С. 99-103.

73. История математического образования в СССР / ред. кол.: И.З. Штокало (отв. ред.) и др. – Киев: Наукова думка, 1975. – 384 с.

74. Карасев, Г.А. Московский государственный педагогический институт им. В.И. Ленина / Г.А. Карасев, И.Г. Кузнецов // Математика в школе. – 1979. – № 1. – С. 38-44.

75. Картан, А.П. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы: Calcul differentiel. Formes differentielles / А.П. Картан. – 2-е изд. – М.: УРСС, 2004. – 392 с.

76. Киселев, А.П. Алгебра. – Ч. 1: учебник для 6–7 классов семилетней и средней школы / А.П. Киселев. – 21-е изд. – М.: Учпедгиз, 1946. – 112 с.

77. Киселев, А. П. Геометрия. – Ч. 1: Планиметрия: учебник для 6–9 кл. семилет. и сред. школы / А.П. Киселев; под ред. и с доп. проф. Н.А. Глаголева. – 21-е изд. – М.: Учпедгиз, 1962. – 184 с.

78. Коваль, Т.В. Модель образовательного стандарта в советской школе (1960–1985) / Т.В. Коваль // Преподавание истории и обществознания в школе. – 2014. – № 2. – С. 44-54.

79. Колмогоров, А.Н. Геометрические преобразования в школьном курсе геометрии / А.Н. Колмогоров // Математика в школе. – 1965. – № 2. – С. 24-29.

80. Колмогоров, А.Н. Геометрия: учебное пособие для 6 класса средней школы / А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Ф.Ф. Нагибин, Р.С. Черкасов; под ред. А.Н. Колмогорова. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 1977. – 128 с.

81. Колмогоров, А.Н. Геометрия: учебное пособие для 7 класса средней школы / А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Ф.Ф. Нагибин, Р.С. Черкасов; под ред. А.Н. Колмогорова. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 1977. – 160 с.

82. Колмогоров, А.Н. Геометрия: учебное пособие для 8 класса средней школы / А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, В.А. Гусев, Р.С. Черкасов; под ред. А.Н. Колмогорова. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 1977. – 112 с.

83. Колмогоров, А.Н. К изменениям в тексте «Учебника алгебры для VI–VIII классов» Барсукова А.Н. / А.Н. Колмогоров // Математика в школе. – 1967. – № 6. – С. 22-24.

84. Колмогоров, А.Н. Новые программы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики в средней школе / А.Н. Колмогоров // Математика в школе. – 1967. – № 2. – С. 4-13.

85. Колмогоров, А.Н. Об учебниках на 1966/67 учебный год / А.Н. Колмогоров // Математика в школе. – 1966. – № 3. – С. 26-30.

86. Колмогоров, А.Н. Проект программы средней школы по математике / А.Н. Колмогоров, А.И. Маркушевич, И.М. Яглом // Математика в школе. – 1967. – № 1. – С. 4-23.

87. Колмогоров, А.Н., А. Ф. О пробном учебнике геометрии для VI класса / А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович // Математика в школе. – 1970. – № 4. – С. 21-34.

88. Колмогоров, А.Н. О новом издании пробного учебника геометрии для VI класса / А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Ф.Ф. Нагибин, Р.С. Черкасов // Математика в школе. – 1971. – № 4. – С. 23-35.

89. Колмогоров, А.Н. О структуре нового учебника по геометрии для VII класса / А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов // Математика в школе. – 1973. – № 2. – С. 17-39.

90. Колмогоров, А.Н. О пробном учебнике геометрии для VII класса / А.Н. Колмогоров, А.Ф. Черкасов // Математика в школе. – 1971. – № 4. – С. 20-31.

91. Колмогоров, А.Н., Яглом И.М. О содержании школьного курса математики / А.Н. Колмогоров, И.М. Яглом // Математика в школе. – 1965. – № 4. – С. 53-61.

92. Колягин, Ю.М. О методической подготовке современного учителя математики в педагогическом институте / Ю.М. Колягин // Математика в школе. – 1971. – № 6. – С. 52-55.

93. Колягин, Ю.М. Русская школа и математическое образование: Наша гордость и наша боль/ Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 2001. – 318 с.

94. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе (общая методика) / Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, Е.Л. Мокрушин, В.А. Оганесян. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

95. Колягин, Ю.М. Бунт российского министерства и Отделения математики АН СССР: (материалы по реформе школьного математического образования 1960–1970-х гг.): учеб. пособие / Ю.М. Колягин, О.А. Саввина. – Елец, 2012. – 154 с.

96. Комов, Н.П., Шендеровская О.И. Ярославский педагогический институт им. К.Д. Ушинского / Н.П. Комов, О.И. Шендеровская // Математика в школе. – 1978. – № 1. – С. 51-53.

97. Кондратьева, Г.В. Модернизация школьного математического образования: опыт прошлого и проблемы современности / Г.В. Кондратьева. – М.: Московский государственный областной университет, 2018. – 156 с.

98. Кондратьева, Г.В. В поисках новой образовательной парадигмы / Г.В. Кондратьева // Начальная школа. – 2021. – № 8. – С. 70-74.

99. Кондратьева, Г.В. К вопросу о модернизации отечественного школьного математического образования в XIX–XXI веках / Г.В. Кондратьева. // Перспективы науки и образования. – 2013. – № 3 (3). – С. 55-62.

100. Кондратьева, Г.В. К вопросу о модернизации школьного математического образования во второй половине XX века / Г.В. Кондратьева // Образование в современной школе. – 2011. – № 9. – С. 58-64.

101. Кондратьева, Г.В. К вопросу о тенденциях развития учебника математики в конце XIX–XX вв.: от специализации к унификации / Г.В. Кондратьева. // Актуальные проблемы математики, физики и математического образования: Сборник трудов кафедры математического анализа и геометрии / Ответственный

редактор Г.В. Кондратьева. – М.: Московский государственный областной университет, 2019. – С. 43-49.

102. Кондратьева, Г.В. Модернизация школьного математического образования: опыт прошлого и проблемы современности / Г.В. Кондратьева. – М.: Московский государственный областной университет, 2018. – 156 с.

103. Копылов, В.С. Московский государственный педагогический институт им В.И. Ленина / В.С. Копылов, О.С. Редозубова // Математика в школе. – 1984. – № 2. – С. 31-33.

104. Костенко, И.П. Истоки реформы-1970 и ее последствия в современном образовании / И.П. Костенко // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2011. – № 13. – С. 25-32.

105. Костенко, И.П. Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы / И.П. Костенко. – 2-е изд., доп. – М.: Рос. гос. ун-т путей сообщения, 2013. – 502 с.

106. Кошкина, М.Д., Чернецов М. М. Итоги приемных экзаменов по математике на математическом факультете МГПИ имени В.И. Ленина / М.Д. Кошкина, М.М. Чернецов // Математика в школе. – 1969. – № 2. – С. 27-30.

107. Кошкина, Е.А. Подходы к реформированию советской школы в условиях конфликта образовательных стратегий 20-х – 30-х гг. XX века / Е.А. Кошкина, С.В. Ядренникова // Ученые записки университета им. П.Ф. Лесгафта. – 2021. – № 3 (193). – С. 221-227.

108. Концепция развития математического образования в Российской Федерации: распоряжение Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р [Электронный ресурс]. – URL: https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/

109. Криводуб, Ю.Г. Киевский институт инженеров гражданской авиации / Ю.Г. Криводуб // Математика в школе. – 1979. – № 1. – С. 45-46.

110. Крупич, В.И. Математический факультет МГПИ имени В.И. Ленина / В.И. Крупич, Е.А. Щегольков // Математика в школе. – 1971. – № 2. – С. 61-68.

111. Кузнецов, Н.Н. О приемных экзаменах по математике в 1967 году / Н.Н. Кузнецов, А.М. Полосцев // Математика в школе. – 1968. – № 2. – С. 43-49.

112. Куликова, С.В. Образование, воспитание и педагогика в России: от прошлого к будущему / С.В. Куликова, А.А. Глебов, С.Г. Новиков. – Волгоград: научное издательство ВГСПУ «Перемена», 2018. – 175 с.

113. Куприкова, О.Н. Словарь-справочник по истории математического образования в России / О.Н. Куприкова, Р.З. Гушель. – Смоленск, 2006. – 106 с.

114. Курдюмова, Н.А. Былое: [воспоминания учительницы о колмогоровской реформе] / Н.А. Курдюмова // Архимед: научно-методический сборник. – М., 2007. – № 3. – С. 20-44.

115. Ларичев, П.А. Сборник задач по алгебре: для средней школы / П.А. Ларичев. – М.: Учпедгиз, 1959. – 240 с.

116. Левин, В.И. Некоторые вопросы преподавания математики в средней школе / В.И. Левин // Математическое просвещение. – М.: Физматгиз, 1959. – Вып. 4. – С. 145-150.

117. Лере, Ж. Задача Коши: Униформизация и асимптотическое разложение решения линейной задачи Коши с голоморфными данными. Аналогия с теорией асимптотических и приближенных волн / Ж. Лере, Л. Гординг, Т. Котаке. – М.: Мир, 1967. – 150 с.

118. Лященко, Е.И. Методика обучения математике в IV–V классах / Е.И. Лященко, А.А. Мазаник. – Минск: Нар. асвета, 1976. – 224 с.

119. Макарычев, Ю.Н. Алгебра: учебное пособие для 6 класса средней школы / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравин; под ред. А.И. Маркушевича. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 1974. – 220 с.

120. Макарычев, Ю.Н. Алгебра: учебное пособие для 7 класса средней школы / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравин; под ред. А.И. Маркушевича. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 1976. – 255 с.

121. Макарычев, Ю.Н. Алгебра: учебное пособие для 8 класса средней школы / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравин; под ред. А.И. Маркушевича. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1975. – 256 с.

122. Макарычев, Ю.Н. О новом учебнике алгебры для VIII класса / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравин, С.Б. Суворова // Математика в школе. – 1974. – № 2. – С. 15-22.

123. Макарычев, Ю.Н. Об экзамене по алгебре за курс восьмилетней школы / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравин, С.Б. Суворова // Математика в школе. – 1976. – № 6. – С. 22-25.

124. Макарычев, Ю.Н. Структура и некоторые особенности нового учебника алгебры для VI класса / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравин // Математика в школе. – 1972. – № 1. – С. 16-22.

125. Макарычев, Ю.Н. О новом учебнике алгебры для VII класса / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравин, С.Б. Суворова // Математика в школе. – 1973. – № 2. – С. 12-18.

126. Макарычев, Ю.Н. Теоретико-множественный подход при формировании понятия функции в VI классе / Ю.Н. Макарычев, К.И. Нешков, А.Д. Семушкин // Математика в школе. – 1966. – № 5. – С. 57-61.

127. Малышев, И.Г. Динамика качества математического образования / И.Г. Малышев // Нижегородское образование. – 2016. – № 1. – С. 17-25.

128. Маркушевич, А.И. Вместо предисловия / А.И. Маркушевич // Народное образование. – 1968. – № 1. – С. 83-86.

129. Маркушевич, А.И. К вопросу о реформе школьного курса математики / А.И. Маркушевич // Математика в школе. – 1964. – № 6. – С. 4-8.

130. Маркушевич, А.И. О повышении идейно-теоретического уровня преподавания математики в средней школе / А.И. Маркушевич // Математика в школе. – 1950. – № 1. – С. 1-4.

131. Маркушевич, А.И. Международный конгресс математиков в Москве / А.И. Маркушевич, В.Г. Ашкинузе, Р.С. Черкасов // Математика в школе. – 1966. – № 6. – С. 11-18.

132. Маркушевич, А.И. Алгебра и элементарные функции: учебное пособие по математике / А.И. Маркушевич, К.П. Сикорский, Р.С. Черкасов; под ред. А.И. Маркушевича. – М.: Просвещение, 1968. – 504 с.

133. Маркушевич, А. С веком наравне / А. Маркушевич // Семья и школа. –1971. – № 10. – С. 2-5.

134. Маслова, Г.Г. О школьном курсе математики и тенденциях его дальнейшего развития / Г.Г. Маслова // Математика в школе. – 1979. – № 6. – С. 49-54.

135. Мельников, И.И. Московский государственный университет / И.И. Мельников, А.С. Мищенко, В.А. Скворцов // Математика в школе. – 1981. – № 2. – С. 42-47.

136. Мельников, Р.А. Уроки реформы математического образования в СССР в 1960–70-е годы / Р.А. Мельников, О.А. Саввина // Классическая и современная геометрия. – М.: изд-во МПГУ, 2021. – С. 108-109.

137. Метельский, Н.В. Вступительные экзамены в школе / Н.В. Метельский // Математика в школе. – 1973. – № 3. – С. 76-77.

138. Метельский, Н.В. Очерки истории методики математики / Н.В. Метельский. – Минск: Вышэйшая школа, 1968. – 340 с.

139. Методика преподавания математики в восьмилетней школе / С.А. Гастева, Б.И. Крельштейн, С.Е. Ляпин, М.М. Шидловская; под общ. ред. С.Е. Ляпина. – М.: Просвещение, 1965. – 744 с.

140. Моисеева, З.И. О вступительных экзаменах в вузы и техникумы / З.И. Моисеева // Математика в школе. – 1977. – № 2. – С. 38-39.

141. Моисеева, З. И. О некоторых результатах работы восьмых классов по новым программам и учебникам / З.И. Моисеева, Е.Г. Глаголева, Н.Г. Миндюк // Математика в школе. – 1975. – № 4. – С. 19-23.

142. Моисеева, З.И. О некоторых итогах работы VI–VII классов в 1973/74 учебном году / З.И. Моисеева, Н.А. Копытов, М.Р. Леонтьева // Математика в школе. – 1974. – № 5. – С. 5-11.
143. Молоков, Д.С. Тенденции развития советской общеобразовательной школы второй половины 60-х – первой половины 80-х гг.: монография / Д.С. Молоков. – Ярославль: изд-во ЯГПУ, 2004. –148 с.
144. На путях обновления школьного курса математики: сборник статей и материалов: пособие для учителей. / сост.: А.И. Маркушевич, Г.Г. Маслова, Р.С. Черкасов. – М.: Просвещение, 1978. – 303 с.
145. Назимова, Л.Г. Тенденции развития математического образования в общеобразовательных учебных заведениях во второй половине XX века: дис. … канд. пед. наук. – Казань, 2009. – 245 с.
146. Народное образование в СССР: Общеобразовательная школа: Сборник документов 1917–1973 гг. – М.: Педагогика, 1974. – 559 с.
147. Недзвецкий, И.А. К вопросу о содержании вступительных экзаменов в вузы по математике / И.А. Недзвецкий, О.Л. Недзвецкий // Математика в школе. – 1973. – № 3. – С. 77-78.
148. Непомнящий, П. Е. По силам ли? / П.Е. Непомнящий // Математика в школе. – 1967. – № 4. – С. 28-29.
149. Неретин, Ю.А. Kolmogorov reform of mathematical education, 1970–1980 [Электронный ресурс] // researchgate.net: [сайт]. – URL:https://www.researchgate.net/publication/337273829_Kolmogorov_reform_of_mathematical_education_1970–1980 (дата обращения: 05.11.2022).
150. Никитин, Н.Н. Геометрия: учебник для 6–8-го классов / Н.Н Никитин. – 12-е изд. – М.: Просвещение, 1971. – 226 с.
151. Никитин, Н.Н. Сборник задач по геометрии: для 6–8 классов/ Н.Н Никитин, Г.Г. Маслова. – 15-е изд. – М.: Просвещение, 1971. – 160 с.
152. О программе по математике для средней общеобразовательной школы на 1982/1983 учебный год // Математика в школе. – 1982. – № 1. – С. 6-24.

153. Обзор неопубликованных статей // Математика в школе. – 1968. – № 1. – С. 16-24.

154. Овчинников, А.В. Нормативно-правовое регулирование методической работы с российским учительством (начало 1970-х – конец 1980-х годов) / А.В. Овчинников // Потенциал историко-образовательного знания в психолого-педагогической подготовке будущего учителя: сборник научных трудов Международной научно-практической конференции, Москва, 29-30 октября 2021 года / науч. ред. М.В. Богуславский, отв. ред. М.А. Гончаров. – М.: Московский педагогический государственный университет, 2021. – С. 216-223.

155. Овчинников, А.В. О реформе советской школы 1984 года / А.В. Овчинников // Пространство и Время. – 2014. – № 4 (18). – С. 190-194.

156. Овчинников, А.В. Российская общеобразовательная школа 1970-х годов: проблемы развития / А.В. Овчинников // Вестник Бурятского государственного университета. Образование. Личность. Общество. – 2024. – № 1. – С. 3-10.

157. Одинцова, Л.А. Математический факультет Барнаульского государственного педагогического института / Л.А. Одинцова, Л.А. Осипова // Математика в школе. – 1981. – № 2. – С. 49-50.

158. О новой концепции математического образования – ректор МГУ В.А. Садовничий на Всероссийском съезде учителей и преподавателей математики. – [Электронный ресурс]. – URL: https://msu.ru/press/smiaboutmsu/o-novoy-kontseptsii-matematicheskogo-obrazovaniya-rektor-mgu-v-a-sadovnichiy-na-vserossiyskom-sezde-.html?tmpl=common

159. Острова утопии: Педагогическое и социальное проектирование послевоенной школы (1940–1980-е). – М.: Новое литературное обозрение, 2015. – 720 с.

160. Очерки истории становления и развития методик общего среднего образования / А.А. Лаврентьев, Е. А. Седова, В.А. Орлов [и др.]. Том 2, часть 1. – М.; СПб.: Издательство Нестор-История, 2014. – 298 с.

161. Очерки истории школы и педагогической мысли народов СССР (1961–1986 гг.) / под ред. Ф.Г. Паначина, М.Н. Колмаковой, З.И. Равкина. – М.: Педагогика, 1987. – 416 с.
162. Панов, В.Ф., Паршев Л.П. МВТУ им. Баумана / В.Ф. Панов, Л.П. Паршев // Математика в школе. – 1978. – № 2. – С. 64-68.
163. Перечень поручений по итогам заседания Совета по науке и образованию и встречи с получателями мегагрантов и ведущими учеными: Президент России. – [Электронный ресурс]. – URL: http://www.kremlin.ru/acts/assignments/orders/74689
164. Пиаже, Ж. и др. Преподавание математики: пособие для учителей / Пиаже Ж., Бет. Э., Дьедонне Ж., Лихнерович А., Шоке Г., Гаттеньо К.; пер. с фр. А.И. Фетисова. – М.: Учпедгиз, 1960. – 162 с.
165. Поздняков, А.Н. Реформирование системы общего образования России в середине 1980–1990-х годах: дис. … канд. ист. наук /А.Н. Поздняков. – Саратов, 1999. – 267 с.
166. Поздняков, А.Н. Государство и общество в реформировании российского школьного образования (Исторический опыт взаимоотношений в конце XIX – начале XXI вв.): автореф. дисс. … докт. ист. наук / А.Н. Поздняков. – Саратов, 2005. – 43 с.
167. Полякова, Т.С. История математического образования в России / Т.С. Полякова. – М.: изд-во Московского ун-та, 2002. – 624 с.
168. Пономарев, В.А. Сборник задач и упражнений по арифметике для 5-6 классов восьмилетней школы / В.А. Пономарев, Н.И. Сырнев. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 1966. – 240 с.
169. Понтрягин, Л.С. Жизнеописание Льва Семеновича Понтрягина, математика, составленное им самим / Л.С. Портнягин. – М.: «Комкнига», 2006. – 173 с.
170. Понтрягин, Л.С. О математике и качестве ее преподавания / Л.С. Портнягин // Коммунист. – 1980. – № 14. – С. 99-112.
171. Попов, А.А. Генезис содержания математического образования в СССР (1940–1960-е гг.) / А.А. Попов // Вестник СамГУ. – 2014. – № 5 (116). –

[Электронный ресурс]. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/genezis–soderzhaniya–matematicheskogo–obrazovaniya–v–sssr–1940–1960–e–gg (дата обращения: 09.07.2024).
172. Попов, И.Г. Арифметика: учебник для 5 и 6 классов неполной средней и средней школы / И.Г. Попов; под ред. проф. И.И. Чистякова. – 5-е изд. – М.: Учпедгиз, 1936. – 144 с.
173. Преемственность и новаторство в развитии основных направлений отечественной педагогической науки (конец XIX–XX вв.) / М.В. Богуславский, Т.Н. Богуславская, В.М. Лобзаров [и др.]; под ред. М.В. Богуславского. – М., 2012. – 500 с.
174. Примерная программа самообразования учителей математики // Математика в школе. – 1972. – № 4. – С. 52-58.
175. Программа по математике для IV–V классов средней школы // Математика в школе. – 1971. – № 1. – С. 12-15.
176. Программа по математике для IV–X классов средней общеобразовательной школы // Математика в школе. – 1979. – № 3. – С. 15-21.
177. Программа по математике для средней школы // Математика в школе. – 1968. – № 2. – С. 5-20.
178. Прохоренко, В.И. Московский энергетический институт / В.И. Прохоренко // Математика в школе. – 1980. – № 3. – С. 37-38.
179. Пчелинцев, С.В. Московский государственный педагогический институт им В. И. Ленина / С.В. Пчелинцев, Е.В. Силаев // Математика в школе. – 1983. – № 2. – С. 33-36.
180. Редозубова, О.С. Математический факультет МГПИ им. В.И. Ленина / О.С. Редозубова // Математика в школе. – 1977. – № 1. – С. 51-54.
181. Резников, В.М. Философские предпосылки математических дискуссий в контексте критики условий применения математики по Колмогорову / В.М. Резников // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. – 2020. – № 56. – С. 33-41.

182. Резолюция, принятая на сессии группы математиков АН СССР 20–21 декабря 1936 г., по вопросу о преподавании математики в средних школах, педвузах и втузах // Успехи математических наук. – 1938. – Вып. 1-5. – С. 309-311.

183. Рекомендация конференции министерствам народного просвещения, относящаяся к преподаванию математики в средних школах / пер. с франц. А.И. Маркушевича // Математическое просвещение. –1957. – Вып. 1. – С. 15-22.

184. Рогановский, Н.М. Аксиоматическое построение школьного курса стереометрии с привлечением идей геометрических преобразований: (содержание и методика изложения): дис. ... канд. пед. наук / Н.М. Рогановский. – М., 1969. – 209 с.

185. Рыбкин, Н.А. Прямолинейная тригонометрия: учебник для 9 и 10 классов средней школы / Н.А. Рыбкин. – 23-е изд. – М.: Учпедгиз, 1945. – 104 с.

186. Рыбников, К.А., Рыбников К.К. Войны за просвещение. Математическое образование в СССР и России и Болонский процесс / К.А. Рыбников, К.К. Рыбников. – М.: Гелиос АРВ, 2012. – 160 с.

187. Саввина, О.А. История отечественного школьного математического образования: учебное пособие / О.А. Саввина, О.В. Тарасова. – 2-е изд., стер. – М.: ФЛИНТА, 2024. – 75 с.

188. Сергеев, Н.К. Избранные труды по педагогике / Н.К. Сергеев. – Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, «Перемена», 2011. – 284 с.

189. Силин, А.В. Математический факультет Свердловского педагогического института / А.В. Силин // Математика в школе. – 1978. – № 1. – С. 44-46.

190. Смирнов, В.И. История образования и педагогической мысли. Часть II. История отечественного образования и педагогики: учебное пособие / В.И. Смирнов. – Нижний Тагил: Нижнетагильская государственная социально-педагогическая академия, 2012. – 421 с.

191. Современный учебник. Формирование ключевых навыков человека XXI века: метод. пособие для авторов учебников, экспертов, учителей / М.В. Богуславский,

И.М. Осмоловская, М.В. Кларин [и др.]. – М.: ФГБНУ «Ин-т стратегии развития образования РАО», 2022. –180 с.

192. Строева, Н.В. Почему идут в ПТУ? / Н.В. Строева // Семья и школа. – 1977. – № 6. – С. 22-25.

193. Терешин, Н.А. Московский государственный педагогический институт им. В.И. Ленина / Н.А. Терешин, Ю.Н. Шахов // Математика в школе. – 1988. – № 2. – С. 41-42.

194. Терновая, Н.А. История школьного математического образования в России и за рубежом: учебно-методическое пособие / Н.А. Терновая. – Саратов, 2012. – 76 с.

195. Тихомиров, В.М. Педагогические замыслы А.Н. Колмогорова о курсе геометрии в школе / В.М. Тихомиров // Труды VI Колмогоровских чтений. – Ярославль, 2008. – С. 10-18.

196. Том, Р. Структурная устойчивость и морфогенез / Р. Том. – М.: Логос, 2002. – 277 с.

197. Указ Президента Российской Федерации от 21 июля 2020 года № 474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года». – [Электронный ресурс]. – URL: http://www.kremlin.ru/acts/bank/45726

198. Ускова, О.Ф. Воронежский государственный университет им. Ленинского Комсомола / О.Ф. Ускова, Г.Ф. Федотенко // Математика в школе. – 1979. – № 1. – С. 41-43.

199. Фирсов, В.В. Учим математикой: [сб. статей и воспоминаний]. – М.: Просвещение, 2012. – 224 с.

200. Фирсов, В.В. Состояние и перспективы факультативных занятий по математике: пособие для учителей / В.В. Фирсов, О.А. Боковнев, С.И. Шварцбурд; под ред. и с предисл. М.П. Кашина. – М.: Просвещение, 1977. – 48 с.

201. Хинчин, А.Я. Всестороннее, реальное образование советской молодежи / А.Я. Хинчин // Математика в школе. – 1939. – № 6. – С. 1-7.

202. Хинчин, А.Я. Основные понятия математики в средней школе / А.Я. Хинчин // Математика в школе. – 1939. – № 4. – С. 4-22.

203. Ходырев, А.М. Советская школа 50-х –середины 60-х годов как социокультурный феномен / А.М. Ходырев. – Ярославль: Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, 2004. – 151 с.

204. Чапичо, О.Т. Вопросы новой программы IV–V классов в работе методического объединения учителей математики г. Севастополя / О.Т. Чапичо // Математика в школе. – 1970. – № 2. – С. 47-50.

205. Шакиров, Р.В. Системно-концептуальный анализ реформ общего среднего образования в России в XX веке: дисс. … докт. пед. наук / Р.В. Шакиров. – Казань, 1997. – 285 с.

206. Шалимова, К.И. Из опыта проведения экзамена по алгебре в VIII классе / К.И. Шалимова, Р.Г. Чуракова // Математика в школе. – 1975. – № 1. – С. 27-30.

207. Шевченко, И.Н. Арифметика: учебник для 5 и 6 классов / И.Н. Шевченко. – 15-е изд. – М.: Просвещение, 1970. – 216 с.

208. Шестырева, Л.В. Коломенский педагогически й институт / Л.В. Шестырева, И.Б. Юдина // Математика в школе. – 1980. – № 3. – С. 42-44.

209. Шониа, В.Н. Идеи множества и вероятности в курсе математики средней школы: автореф. дисс… канд. пед. наук / В.Н. Шониа. – Тбилиси, 1967. – 15 с.

210. Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове / сост. Н. Х. Розов; под общ. ред. В. М. Тихомирова. – М.: ФАЗИС; МИРОС, 1999. – 256 с.

211. Ястребинецкий, Г.А. Лучше учитывать содержание школьной программы // Математика в школе. – 1979. – № 1. – С. 48-49.

212. Boyko M. Soviet Mathematics Education in the Late 1970s: New Concerns // Notes de la SMC. –2020. – vol. 52. – no. 1. – Pp. 20-21.

213. Dvoryatkina S. N., Melnikov R. A., Savvina O. A. Reform and counter-reform of mathematics education in the Ussr in 1960–1970 // Перспективы науки и образования. – 2022. – № 6 (60). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/reform-and-counter-reform-of-mathematics-education-in-the-ussr-in-1960-1970 (дата обращения: 20.07.2024).

214. Fecteau A. N. What is modern about “modern” mathematics in the intermediate grades? – Manhattan: Kansas State University, 1968. – 111 p.

215. Feynman R. P. New Textbooks for “New” Mathematics // Engineering and Science. –1965. – № 28 (6). – Pp. 9-15.

216. Gattegno C. Now Johnny Can Do Arithmetic. – New York: Educational Solutions Inc., 1960. – 82 p.

217. Gosztonyi K. The 'New Math' reform and pedagogical flows in Hungarian and French mathematics education // CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME. – Feb 2015. – Prague, Czech Republic. – Pp. 1709-1716.

218. Graumann G. Backgrounds and Goals of ‘Innovations’: The Examples of New Math in the 1960s and the Change from Input to Output 1995 // International Dialogues on Education: Past and Present. – 2019. – № 6. – Pp. 63-68.

219. Hoffman J., Johnson C., Logg A. Dreams of Calculus: Perspectives on Mathematics Education. – Springer, 2004. – 158 p.

220. Katz V. J. Using History to Teach Mathematics: An International Perspective. – New York: The Mathematical Association of America, 2000. – 261 p.

221. Klein F. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert: Teil I. – Berlin: Springer, 1926. – 618 p.

222. Krygovskaya A. S. The development of students' mathematical activity and the role of tasks in this development // Mathematics in school. 1966. № 6. Pp. 19-30.

223. Kurepa G. Ensembles ordonnées et ramifiés. Paris: mpr. “Merkour”, 1935. 140 p.

224. Marmier A. M. On the idea of ‘democratisation', ‘modern mathematics' and mathematics teaching in France // Lettera Matematica. 2014. No. 2. Pp. 139-148.

225. Mashaal M. Bourbaki Une Société Secrète De Mathématiciens. Paris: Éditions Pour la Science, 2002. 252 p.

226. Miller J. W. Whatever Happened to New Math? // American Heritage. 1990. № 8. Pp. 76-83.

227. Papy F., Papy G. Danielle Incolle. L'enfant et les graphes. Paris: Marcel Didier, 1968. 189 p.

228. Parsons C. The Madison Project and new math – what happened? // The Christian Science Monitor. 1981. № 2. Pp. 32-39.

229. Piaget J., Beth E., Dieudonné J., Lichnerowicz A., Choquet G., Gattegno C. L'enseignement des Mathématiques. Delachaut A. Niestlé Neuchatel. – Paris, 1955. – 161 p.